

Enumerasie van self-ortogonale Latynse vierkante van orde 10

AP Burger, MP Kidd & JH van Vuuren
Departement Logistiek
Universiteit Stellenbosch

Summary

A Latin square of order n is an $n \times n$ array of the symbols $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ such that every row and every column of the array contains each element of $\mathbb{Z}_n$. Denote the entry in row $i \in \mathbb{Z}_n$ and column $j \in \mathbb{Z}_n$ of a Latin square L by $L(i, j)$. Two Latin squares L and L' are orthogonal if the ordered pairs $(L(i, j), L'(i, j))$ are all distinct as i and j vary over $\mathbb{Z}_n$. Furthermore, a Latin square is self-orthogonal if the square is orthogonal to its transpose, and idempotent if $L(i, i) = i$ for all $i \in \mathbb{Z}_n$.

Two self-orthogonal Latin squares L and L' are in the same (row, column)-paratopism class if there exist two permutations p and q such that, if p is applied to the rows and columns of L and q to the symbols of L , then L is mapped to L' or to the transpose of L' . Moreover, L and L' are in the same isomorphism class if one permutation applied to the rows, columns and symbols of L maps it to L' , and in the same transpose isomorphism class if such a permutation maps L to L' or its transpose.

The sizes of the above equivalence classes of self-orthogonal Latin squares, as well as the number of idempotent self-orthogonal Latin squares of order at most 9, have been documented in the literature. The equivalence classes of self-orthogonal Latin squares of order 10 are enumerated in this paper by means of a large parallel computing effort.

Opsomming

'n Latynse vierkant van orde n is 'n $n \times n$ -skikking van die simbole $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ sodat elke ry en elke kolom van die skikking elke element van $\mathbb{Z}_n$ bevat. Indien die inskrywing in ry $i \in \mathbb{Z}_n$ en kolom $j \in \mathbb{Z}_n$ van 'n Latynse vierkant L aangedui word deur $L(i, j)$, is twee Latynse vierkante L en L' ortogonaal as die geordende pare $(L(i, j), L'(i, j))$ almal verskillend is soos wat i en j oor $\mathbb{Z}_n$ varieer. 'n Latynse vierkant is verder self-ortogonaal indien die vierkant en sy transponent ortogonaal is, en idempotent indien $L(i, i) = i$ vir alle $i \in \mathbb{Z}_n$.

Twee self-ortogonale Latynse vierkante L en L' is in dieselfde (ry, kolom)-paratopieklass indien daar twee permutasies p en q bestaan sodat as p op die rye en kolomme van L en q op die simbole van L toegepas word, die vierkant L óf op L' óf op die transponent van L' afgebeeld word. Verder is L en L' in dieselfde isomorfismeklas indien een permutasie toegepas op die rye, kolomme en simbole van L , die vierkant L afbeeld op L' , en in dieselfde transponent-isomorfismeklas indien só 'n permutasie L op L' of op sy transponent afbeeld.

Die groottes van bogenoemde ekwivalensieklasse van self-ortogonale Latynse vierkante, asook die getal idempotente self-ortogonale Latynse vierkante van orde hoogstens 9, is in die literatuur gedokumenteer. In hierdie artikel word hierdie ekwivalensieklasse van self-ortogonale Latynse vierkante van orde 10 in 'n groot parallelle berekeningspoging getel.

Extended Abstract

A *Latin square* of order n is an $n \times n$ array of the symbols $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ such that every row and every column of the array contains each element of $\mathbb{Z}_n$. Denote the entry in row $i \in \mathbb{Z}_n$ and column $j \in \mathbb{Z}_n$ of a Latin square L by $L(i, j)$. The *transpose* of a Latin square L , denoted by L^T , is a Latin square with the property that $L^T(i, j) = L(j, i)$ for all $(i, j) \in \mathbb{Z}_n^2$. Two Latin squares L and L' are distinct if $L(i, j) \neq L'(i, j)$ for at least one ordered pair $(i, j) \in \mathbb{Z}_n^2$, while a Latin square L is *idempotent* if $L(i, i) = i$ for all $i \in \mathbb{Z}_n$.

Furthermore, two Latin squares L and L' are orthogonal if the ordered pair $(L(i, j), L'(i, j))$ is unique as i and j vary over $\mathbb{Z}_n$, while a Latin square is *self-orthogonal* if it is orthogonal to its transpose. In what follows, we abbreviate the phrase *self-orthogonal Latin square* to the acronym SOLS.

The two SOLS L and L' are *isomorphic* if there exists a permutation $p \in S_n$ (where S_n is the symmetric group of order n) such that $p(L(i, j)) = L'(p(i), p(j))$, while L and L' are *transpose-isomorphic* if $p(L(i, j)) = L'(p(i), p(j))$ or $p(L^T(i, j)) = L'(p(i), p(j))$ for all $(i, j) \in \mathbb{Z}_n^2$. The class of all SOLS isomorphic to a given SOLS L is called the *isomorphism class generated by L* , while the class of all SOLS transpose-isomorphic to a given SOLS L is called the *transpose-isomorphism class generated by L* . Finally, two SOLS L and L' are *(row, column)-paratopic* if there exist two permutations $p, q \in S_n$ such that

$$q(L(i, j)) = L'(p(i), p(j)) \text{ or } q(L(i, j)^T) = L'(p(i), p(j)),$$

and the class of SOLS (row, column)-paratopic to SOLS L is called the *(row, column)-paratopism class generated by L* . The triple of permutations $(p, q, t) \in S_n^2 \times S_2$ is called a *(row, column)-paratopism*, where t permutes the roles of the rows and columns of a SOLS (i.e. possibly permits a switch between the SOLS and its transpose).

The number of distinct SOLS, idempotent SOLS and isomorphism classes generated by idempotent SOLS of orders up to and including 9 have been enumerated by Graham and Roberts [21]. In [12] we verified the numbers of these classes independently, and we also enumerated the number of isomorphism classes generated by all SOLS, the number of transpose-isomorphism classes generated by all SOLS, as well as the number of (row, column)-paratopism classes generated by all SOLS of orders up to and including 9. The computational complexities of the methods used in [12, 21] are too demanding to allow for the traditional enumeration of these classes generated by SOLS of order 10 in a realistic time frame. However, we have recently been able to enumerate these classes of SOLS of order 10 on a network of computers, and we report the results of this parallel enumeration effort in the current paper.

The first step in the enumeration of the various classes of SOLS of order 10 is to enumerate the (row, column)-paratopism classes generated by SOLS of order 10. This was achieved by means of a depth-first search tree employing backtracking and a number of pruning rules in order to reduce redundancy during the search. This enumeration method is

constructive in the sense that it enabled us to build up a repository of class representatives of (row, column)-paratopism classes generated by SOLS of order 10. In order to describe this enumeration method, a number of definitions are required.

A *universal* of a symbol $k \in \mathbb{Z}_n$ in a Latin square L , denoted by $u(k)$, is a permutation that captures the n positions of k in L in the sense that, if k is found in row i of column u_i , then the universal associated with k is given by

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ u_0 & u_1 & u_2 & \cdots & u_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Let $u(i)$ and $u'(i)$ be the universals of the element i in the SOLS L and L' , respectively. Then L is *smaller* than L' if $u(i)$ is lexicographically smaller than $u'(i)$ for some $i \in \mathbb{Z}_n$ and $u(j) = u'(j)$ for all $0 \leq j \leq i$. We call the smallest idempotent SOLS in each (row, column)-paratopism class the *class leader* of that class.

A permutation is said to be of *type* $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ if it has a_i cycles of length i for $1 \leq i \leq n$, and the permutation type $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ is smaller than the type $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ if $a_i > b_i$ for some $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ and $a_j = b_j$ for all $1 \leq j < i$. The lexicographically smallest permutation of a certain type is said to be the *representative permutation* of that type.

On each level, the backtracking tree search branches on the inclusion of all possible universals into a partially completed SOLS, provided that (i) the inclusion of no universal destroys the self-orthogonal property of the partially completed SOLS and (ii) no smaller partially completed SOLS already exists in the search tree. It is easy to show that the permutation types of the universals of a SOLS are invariant under a (row, column)-paratopism, and therefore that the first universal (the universal associated with the element 0) of a class leader of a (row, column)-paratopism class is a representative permutation of its type and has a smaller type than any other universal. Hence, the first universal of any partially completed SOLS in the tree search is restricted to be a representative permutation of its type, and any other universal is restricted to be of a type smaller than that of the first universal.

In order to test whether a partially completed SOLS (whose first universal is a representative of its type and which contains no universal of a smaller type than that of the first one) can possibly be completed to a class leader, we first note that its first universal must remain fixed. Hence, each universal of the same permutation type as the first (including the first) should be mapped in turn to the first universal and, if the resulting partially completed SOLS is smaller than the original SOLS, then the original SOLS cannot be completed to a class leader.

This method for the enumeration of (row, column)-paratopism classes generated by SOLS of order 10 was implemented in C++ and the computations were performed in parallel on thirty 2.4 GHz Intel(R) processors (each with 1 gigabyte RAM). In total, 121 642 (row, column)-paratopism class leaders were found, and these SOLS are available electronically [10]. The total (serial) computing time required was 9 910 289 seconds (≈ 115 days).

Once a class leader from each (row, column)-paratopism class generated by SOLS of order 10 has been generated, these class leaders may be used to enumerate distinct and idempotent SOLS, as well as isomorphism classes and transpose-isomorphism classes generated by SOLS of order 10. This may be done by utilising the (row, column)-*autoparatopism group* of a SOLS L , denoted by $A(L)$, which is defined as the set of all the (row, column)-paratopisms that map L to itself. A method for generating the (row, column)-autoparatopism group of a SOLS using the computer program nauty [28] is described in [12]. The number of distinct SOLS in the (row, column)-paratopism class of a SOLS L of order n is

$2(n!)^2/|A(\mathbf{L})|$ [6, Theorem 14.5, p. 307], while the number of idempotent SOLS of order n equals the number of distinct SOLS of order n divided by $n!$.

Let $\mathcal{I}(n)$ denote the set of class leaders, one from each class, of (row, column)-paratopism classes generated by SOLS of order n , and let $\psi(\alpha) = \prod_{i=1}^n a_i! i^{a_i}$, where α is a permutation of type $(a_1, a_2, \dots, a_n)$. The number of transpose-isomorphism classes of SOLS of order n is given by the following result, which was adapted in [12] from a theorem by McKay *et al.* [29].

Theorem 1 *There are*

$$\sum_{\mathbf{L} \in \mathcal{I}_n} \frac{1}{|A(\mathbf{L})|} \sum_{\alpha \in A(\mathbf{L})} \psi(\alpha)$$

transpose-isomorphism classes of SOLS of order n . ■

Similarly, if $\mathcal{I}'(n) \subseteq \mathcal{I}(n)$ denotes the set of class leaders that are isomorphic to their transposes, and if $\mathcal{I}''(n) = \mathcal{I}(n) \setminus \mathcal{I}'(n)$, then the following result gives the number of isomorphism classes generated by SOLS of order n .

Theorem 2 *The number of isomorphism classes of SOLS of order n is*

$$\sum_{\mathbf{L} \in \mathcal{I}'_n} \frac{1}{|A'(\mathbf{L})|} \sum_{\alpha \in A'(\mathbf{L})} \psi(\alpha) + \sum_{\mathbf{L} \in \mathcal{I}''_n} \frac{2}{|A(\mathbf{L})|} \sum_{\alpha \in A(\mathbf{L})} \psi(\alpha),$$

where $A'(\mathbf{L}) \subset A(\mathbf{L})$ denotes the set of all (row, column)-paratopisms of $\mathbf{L}$ that do not transpose $\mathbf{L}$. ■

The results of the computerised and analytic enumeration methods described above for the various equivalence classes of SOLS of orders $4 \leq n \leq 10$ are shown in Table 1.

n	Distinct SOLS	Distinct idempotent SOLS	Isomorphism classes generated by idempotent SOLS	Isomorphism classes generated by all SOLS	Transpose- isomorphism classes generated by all SOLS	(Row, column)- paratopism classes generated by all SOLS
4	48	2	1	6	5	1
5	1 440	12	2	22	11	1
6	0	0	0	0	0	0
7	19 353 600	3 840	8	3 972	1 986	4
8	4 180 377 600	103 680	8	104 120	52 060	4
9	25 070 769 561 600	69 088 320	283	69 112 956	34 564 884	175
10	3 200 285 563 453 440 000	881 912 908 800	243 284	881 912 947 656	440 956 473 828	121 642

Table 1: Enumeration of various classes of SOLS of orders $4 \leq n \leq 10$.

Up to and including order 8, the computing time for generating (row, column)-paratopism classes of SOLS required no more than one second. However, for order 9 the tree search required 454 seconds to generate the SOLS, and, as mentioned before, the required computing time for order 10 was 9 910 289 seconds. The exponential growth of these computing times is the reason why the numbers of equivalence classes of SOLS mentioned in Table 1 were previously only known up to and including order 9. The enumeration effort extending these results to order 10 was certainly not trivial – to the extent that we do not expect a further extension to SOLS of order 11 soon. To give the reader an idea of the

expected computational complexity of extending the tree search to order 11, we computed the number of nodes on the first level of the search tree for order 11, and linearly extrapolating the average times to fathom a node on the first level of the search trees for orders 9 and 10, we estimate a conservative lower bound of 270 164 100 000 seconds ($\approx 8\,567$ years) for the total time required to traverse the search tree for SOLS of order 11 (before parallelisation) if the same enumeration methods are used.

Inleiding

In 1782 het die groot Switserse wiskundige Leonhard Euler (1707–1783) die volgende probleem in 'n navorsingsartikel, toevallig sy enigste artikel ooit in 'n Nederlandse tydskrif, gestel:

'n Uitsers tergende vraag wat reeds geruime tyd die wêreld se beste kundiges teister, het my genoep om die volgende ondersoek te onderneem, wat lyk asof dit 'n nuwe rigting inslaan in analise, veral in die kombinatorika. Hierdie vraag gaan oor 'n parade van 36 offisiere van ses verskillende range en ses verskillende regimente wat in 'n vierkant moet aantree op so 'n manier dat daar in elke ry, horisontaal sowel as vertikaal, ses offisiere van verskillende range en verskillende regimente is. [16]

Hierdie probleem het sedertdien bekendheid verwerf as die sogenaamde 36-offisiere-probleem [14, Hoofstuk I.2]. Euler het die ses Latynse letters a, b, c, d, e en f gebruik om die verskillende regimente voor te stel, en die ses Griekse letters α , β , γ , δ , ϵ en ζ om die verskillende range voor te stel. Die 36-offisiere-probleem vra dan om 'n rangskikking van geordende pare letters, een uit die versameling {a, b, c, d, e, f} en een uit die versameling $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta\}$, in 'n vierkantige 6×6 -rooster sodat geen paar meer as een keer in die rooster verskyn nie en geen letter meer as een keer in enige ry of kolom van die rooster verskyn nie. Euler kon nie daarin slaag om die 36-offisiere-probleem op te los nie, maar het die gedeeltelike oplossing in Tabel 2 gegee. In hierdie gedeeltelike oplossing verskyn elke letter presies een keer in elke ry en elke kolom van die rooster, maar die geordende pare b ζ en d ϵ verskyn elk twee keer in die rooster, terwyl die pare b ϵ en d ζ glad nie verskyn nie.

a α	b ζ	c δ	<u>dϵ</u>	e γ	f β
b β	c α	f ϵ	e δ	a ζ	d γ
c γ	<u>dϵ</u>	a β	b ζ	f δ	e α
d δ	f γ	e ζ	c β	b α	a ϵ
e ϵ	a δ	b γ	f α	d β	c ζ
f ζ	e β	d α	a γ	c ϵ	b δ

Tabel 2: Euler se gedeeltelike oplossing van die 36-offisiere-probleem [16]. Die pare b ζ en d ϵ verskyn twee keer (in die onderstreepte posisies), terwyl die pare b ϵ en d ζ glad nie verskyn nie.

Euler het selfs vroeër as 1782 die meer algemene probleem beskou waar daar n^2 offisiere van n verskillende range en n verskillende regimente is, en het (as gevolg van sy gebruik van Griekse en Latynse letters om die range en regimente voor te stel) na die gepaardgaande $n \times n$ -rooster as 'n *Graeko-Latynse vierkant van orde n* verwys, waar n enige natuurlike getal groter as 1 is. Hy het ook belang gestel in soortgelyke vierkante waarin

die Griekse letters weggelaat word, waarna hy bloot as *Latynse vierkante van orde n* verwys het – in so 'n vierkant is die vereiste dat elke Latynse letter een keer in elke ry en elke kolom moet verskyn [25].

Graeko-Latynse vierkante

Euler het vele voorbeelde van Graeko-Latynse vierkante gevind en ook twee algemene getalteoretiese konstruksies vir sulke vierkante daargestel – een vir vierkante van onewe orde en een vir vierkante waarvan die orde 'n veelvoud van 4 is. Daar is natuurlik geen rede waarom juis Griekse en Latynse letters in sulke vierkante gebruik moet word nie; enige twee onderskeibare versamelings van verskillende simbole kan gebruik word. Indien die twee versamelings byvoorbeeld die huise ♠, ♦, ♣, ♥ en die vier koninklike range *boer*, *koningin*, *koning* en *aas* in 'n pak speelkaarte is, vorm die rangskikking van die ses-tien speelkaarte in Figuur 1 'n Graeko-Latynse vierkant van orde 4 (met die eienskap dat elke huis en elke koninklike rang in elke ry en kolom van die rangskikking voorkom). Voorbeelde van Graeko-Latynse vierkante van ordes 5 en 7 word in Figuur 2 getoon. Die vierkant van orde 5 in hierdie figuur vorm deel van 'n kommersieel beskikbare speletjie [33], terwyl die vierkant van orde 7 op 'n kwilt van ene Meagher verskyn [30].



Figuur 1: 'n Graeko-Latynse vierkant van orde 4 met die eienskap dat elke kaarthuis (♠, ♦, ♣, ♥) en elke koninklike rang (*boer*, *koningin*, *koning*, *aas*) in elke ry en kolom van die rangskikking voorkom.

Euler kon egter geen voorbeeld van 'n Graeko-Latynse vierkant van ewe orde vind wat nie 'n veelvoud van 4 is nie en dit het hom gelei na die onderstaande vermoede dat daar geen so 'n vierkant van orde $n = 4m + 2$ (m.a.w. van ordes 6, 10, 14, ...) bestaan nie:

... en ek bevind sonder voorbehoud hieruit dat 'n mens nie op enige manier 'n volle vierkant met 36 inskrywings kan verkry nie, en dat hierdie onmoontlikheid ook strek tot die geval van $n = 10$, $n = 14$ en in die algemeen tot alle onewe-ewe getalle. [16]

Ten spyte van sy ontsagwekkende wiskundige vermoëns kon Euler egter nie die bogenoemde uitspraak bewys nie; trouens, hierdie vermoede het vir meer as 100 jaar onbevestig gebly totdat die Franse wiskundige Gaston Tarry [35] in 1900 'n bietjie nader



Figuur 2: Voorbeelde van Graeko-Latynse vierkante van ordes 5 en 7. (a) 'n Graeko-Latynse vierkant van orde 5 wat in 'n kommersieel beskikbare speletjie voorkom (onopgelos vertoon) [33]. (b) 'n Graeko-Latynse vierkant van orde 7 op 'n kwilt van Meagher [30].

gekom het aan 'n bewys vir die vermoede deur aan te toon dat daar geen oplossing vir die 36-offisiere-probleem bestaan nie. Tarry se bewys het neergekom op 'n uitputtende eliminasieproses van alle moontlikhede en het Euler se vermoede vir $n = 6$ bevestig. Maar hierdie klein stappie het geen uitspraak gelewer oor die korrektheid van Euler se vermoede vir $n = 10, 14, 18, \dots$ nie. Nege-en-vyftig jaar later het die twee Indiese wiskundiges Raj Chandra Bose en Sharadchandra Shankar Shrikhande egter tot almal se verbasing 'n Graeko-Latynse vierkant¹ van orde 22 gevind [7]! Hierdie vierkant was die eerste teenvoorbeeld vir 'n spesiale geval van Euler se vermoede. Kort daarna, ook in 1959, het die Amerikaanse wiskundige Ernest Tilden Parker 'n Graeko-Latynse vierkant van orde 10 gekonstrueer [32], en in 1960 het Bose, Shrikhande en Parker uiteindelik daarin geslaag om Euler se vermoede vir *al die oorblywende gevalle* (m.a.w. $n = 14, 18, 26, 30, 34, \dots$) verkeerd te bewys [8]. Graeko-Latynse vierkante van alle ordes $n > 2$ is vandag bekend, behalwe vir die vreemde spesiale geval $n = 6$.

Alhoewel Euler nie na enige vroeër werk oor Graeko-Latynse vierkante verwys het nie, was hy nie die eerste persoon wat in sulke roosters belang gestel het nie. Volgens Andersen [2] is voorbeelde van Latynse vierkante en sogenaamde *magiese vierkante*² op geluksteentjies en talismans in die Midde-Ooste en Indië gevind wat meer as 'n duisend jaar oud is; twee voorbeelde word in Figuur 3 vertoon. Na alle waarskynlikheid kan die vroegste gepubliseerde verwysing na 'n Latynse vierkant in die boek *Shams al-Ma'arif al-Kubra* (*The sun of great knowledge*) deur Ahmad ibn Ali ibn Yusuf al-Buni gevind word; hierdie boek het in 1225 (of selfs vroeër) die lig gesien. Dit is ook interessant om daarop te let dat die 13^{de}-eeuse Spaanse filosoof Ramón Lull gepoog het om "die wêreld te verklaar" deur van Latynse vierkante gebruik te maak [2].

Eintlik vorm die Graeko-Latynse vierkant van orde 4 in Figuur 1 ook deel van 'n dieper probleem wat Euler se werk oor Graeko-Latynse vierkante voorafgegaan het. Die presiese datum waarop hierdie dieper probleem die lig gesien het, is onseker: Volgens Kendall [24]

¹Teen hierdie tyd was die benaming "Graeko-Latynse vierkant" nie meer in gebruik nie. Hierdie benaming is intussen vervang met die meer algemene konsep van ortogonaliteit tussen Latynse vierkante. Twee Latynse vierkante is *ortogonaal* indien, wanneer hulle bo-op mekaar gesuperponeer word, geen geordende paar simbole, een uit die een vierkant en een uit die ander vierkant, in die superposisie herhaal word nie.

²'n *Magiese vierkant* is 'n vierkantige $n \times n$ -rooster wat elk van die getalle $1, 2, \dots, n^2$ bevat sodat die som van elke ry, kolom en hoofdiagonaal gelyk is.



Figuur 3: Magiese vierkante op munte wat in die Berlynse Museum vertoon word [38].

en Styan en Boyer [34] was Henry Ernest Dudeney (1857–1930) onder die indruk dat die probleem in 1624 in 'n boek deur Claude Gaspar Bachet de Méziriac (1581–1638) met die titel *Problèmes plaisants and délectables, qui se font par les nombres* verskyn het. In hierdie probleem word daar gevra op *hoeveel essensieel verskillende maniere* die sestien koninklike speelkaarte in 'n 4×4 -vierkant gerangskik kan word sodat geen huis of koninklike rang meer as een keer in enige ry, kolom of diagonaal van die vierkant voorkom nie. Die Graeko-Latynse vierkant in Figuur 1 is trouens een van die moontlike oplossings wat in hierdie probleem getel moet word. Met die woord *essensieel* word bedoel dat rotasies en refleksies (om die vier simmetrie-asse) van 'n spesifieke rangskikking nie as verskillende rangskikkings beskou word nie. Ball [3] het foutiewelik beweer dat die antwoord op hierdie vraag 72 is. Die korrekte antwoord, naamlik 144, word volgens Gardner [20] aan die Britse wiskundige Dame Kathleen Ollerenshaw toegeskryf, wat haar afleiding van die resultaat in Braille in 'n artikel vir die blindes geskryf het.

Latynse vierkante

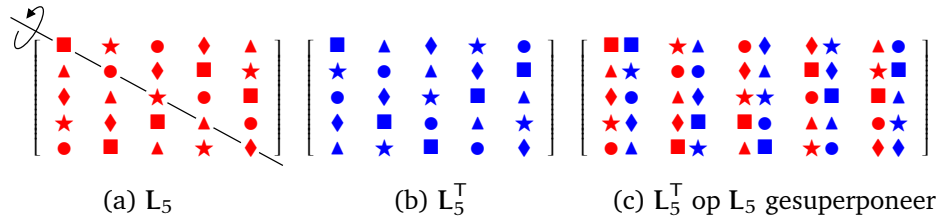
Latynse vierkante kom dikwels in die studievervelde van statistiek en eksperimentele ontwerp voor. Volgens Andersen [2] en Ullrich [36] is een van die vroegste toepassings van Latynse vierkante in ontwerpteorie deur die Franse agro-ekonoom Francois Cretté de Palluel (1741–1798) gepubliseer. De Palluel het (oënskynlik onwetend) 'n Latynse vierkant gebruik om die effekte van verskillende diëte op 'n verskeidenheid skaaptelings te ondersoek. Hy het sestien skape in sy eksperiment gebruik – vier skape uit elk van vier telings, naamlik 'n *landelike teling* (Île de France), 'n teling van Beauce, 'n teling uit die Champagne-distrik, en 'n teling van Picardy. Hy het die skape aan vier verskillende voere blootgestel, naamlik voere gebaseer op aartappels, rape, beet en mielies, en het vir vier opeenvolgende maande vier skape aan die einde van elke maand geslag om die effek van die verskillende diëte op hul vleiskwaliteit te ondersoek. Die vereiste was egter dat elke keer wanneer vier skape geslag word, hulle van vier verskillende telings en op vier verskillende diëte moes wees. Gevolglik het hy die skedule in Tabel 3 gebruik – let op dat die inskrywings in die tabel 'n Latynse vierkant van orde 4 vorm.

Die statistikus Sir Ronald Fisher het ook die gebruik van Latynse vierkante in eksperimentele ontwerp in sy beroemde boeke *Statistical methods for research workers* [17] en *The design of experiments* [18] beskryf. Hy en Frank Yates was ook waarskynlik die eerste persone wat belang gestel het in die aantal verskillende maniere waarop Latynse vierkante van 'n gegewe orde gevorm kan word; hulle was trouens verantwoordelik vir die enumerasie van Latynse vierkante van orde 6 [19].

'n Latynse vierkant is *self-ortogonaal* indien die vierkant en sy sogenaamde *transponent* (die nuwe vierkant wat verkry word deur die vierkant rondom 'n as deur sy noordwestelik-

	Aartappels	Rape	Beet	Mielies
Île de France	1	2	3	4
Beauce	4	1	2	3
Champagne	3	4	1	2
Picardy	2	3	4	1

Tabel 3: Die ontwerp van 'n eksperiment deur die Franse agro-ekonoom Francois Cretté de Palluel om die effek van vier verskillende diëte op die vleiskwaliteit van vier verskillende skaaptelings te ondersoek. Die inskrywing in ry i en kolom j stel die maand voor waarin die skaap van teling i op dieet j geslag moet word.



Figuur 4: (a) 'n Self-ortogonale Latynse vierkant L_5 van orde $n = 5$. (b) Die transponent, L_5^T , van die vierkant in (a). (c) Die superposisie van die vierkante L_5 en L_5^T waarin al die geordende pare simbole verskillend is.

suidoostelike diagonaal te roteer) ortogonaal is. 'n Voorbeeld van 'n self-ortogonale Latynse vierkant kan in Figuur 4 gevind word. Self-ortogonale vierkante speel 'n selfs belangriker rol in eksperimentele ontwerp as gewone Latynse vierkante, soos deur Hedayat [22, 23] beskryf, en hierdie klas Latynse vierkante word normaalweg aan Mendelsohn [31] toegeskryf. In 1973 het Brayton *et al.* [9] bewys dat self-ortogonale Latynse vierkante van alle ordes bestaan, behalwe³ vir $n = 2$, $n = 3$ en (weereens!) $n = 6$. In die artikel deur Brayton *et al.* vertel die outeurs hoe hulle op 'n toepassing in die skedulering van sporttoernooie afgekom het waarin self-ortogonale Latynse vierkante 'n belangrike rol speel. Hulle het in 1972 opgelet dat 'n self-ortogonale Latynse vierkant gebruik kan word om die opponerende spanne in 'n sogenaamde *gade-vermydende gemengde-dubbels-rondomtalie-tennisttoernooi*⁴ op te stel. Wang [37] het verder in 1978 opgelet dat indien 'n simmetriese Latynse vierkant S_n van orde n gevind kan word wat ortogonaal is aan beide 'n self-ortogonale Latynse vierkant L_n en aan sy transponent, die paar (L_n, S_n) gebruik kan word om die potte van 'n *gade-vermydende gemengde-dubbels-rondomtalie-tennisttoernooi* waarin n getroude pare deelneem op só 'n manier in die minimum getal rondtes te skeduleer dat elke persoon presies een keer in elke rondte speel. Die paar (L_n, S_n) is 'n spesiale geval van die volgende stap in die ontwikkeling van die teorie oor Latynse vierkante nadat Euler die konsep van 'n Graeko-Latynse vierkant ingevoer het, naamlik die begrip van 'n versameling van *paarsgewys-ortogonale Latynse vierkante*. Sedert die val van Euler se vermoede het die soeke na groter en groter versamelings van paarsgewys-ortogonale Latynse vierkante 'n vrugbare teelaarde vir nuwe onopgeloste probleme in die teorie oor Latynse vierkante geword. In hierdie soeke het die spesiale geval $n = 10$ hom weereens as 'n waardige teenstander bewys: Alhoewel verskeie pare ortogonale Latynse vierkante van orde 10 vandag bekend is, is dit onbekend of 'n versameling van drie paarsgewys-ortogonale Latynse vierkante van orde 10 bestaan – geen so 'n ver-

³Bewyse vir die nie-bestaan van self-ortogonale Latynse vierkante van orde $n = 6$ is aansienlik moeiliker as vir $n = 2$ of $n = 3$. Gevolglik het verskeie onafhanklike bewyse vir die geval $n = 6$ oor die jare die lig gesien. Die huidige outeurs het byvoorbeeld onlangs 'n baie eenvoudige grafiekteoretiese bewys van hierdie nie-bestaansresultaat gepubliseer [11].

⁴'n Gemengde-dubbels-rondomtalie-tennisttoernooi waarin getroude pare op só 'n manier meeding dat geen persoon in 'n span saam met of teen sy/haar gade speel nie.

sameling kon nog gevind word nie, maar niemand kon ook nog bewys dat geen so 'n versameling bestaan nie (sien byvoorbeeld Colbourn en Dinitz [14, Stelling 3.43])!

In hierdie artikel tel ons die getal essensieel verskillende maniere waarop 'n self-ortogonale Latynse vierkant van orde 10 gevorm kan word. Dit is ons hoop dat iemand in die toekoms ons volledige lys van essensieel verskillende self-ortogonale Latynse vierkante van orde 10 sal kan gebruik om 'n derde Latynse vierkant te vind wat ortogonaal is aan een van die vierkante (en sy getransponeerde) in hierdie lys, of om alternatiewelik te bewys dat geen versameling van drie paarsgewys-ortogonale Latynse vierkante van orde 10 'n self-ortogonale Latynse vierkant kan bevat nie.

1. Basiese konsepte en literatuur

'n Latynse vierkant van orde n is 'n $n \times n$ -skikking van die simbole $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ sodat elke ry en elke kolom van die skikking elke element van $\mathbb{Z}_n$ bevat. Ons dui die inskrywing in ry $i \in \mathbb{Z}_n$ en kolom $j \in \mathbb{Z}_n$ van 'n Latynse vierkant L aan deur $L(i, j)$. Die *transponent* van 'n Latynse vierkant L word aangedui deur L^T en het as inskrywing in ry $i \in \mathbb{Z}_n$ en kolom $j \in \mathbb{Z}_n$ die waarde $L(j, i)$. Twee Latynse vierkante L en L' is *verskillend* indien $L(i, j) \neq L'(i, j)$ vir minstens een geordende paar $(i, j) \in \mathbb{Z}_n^2$, terwyl 'n Latynse vierkant L *idempotent* is indien $L(i, i) = i$ vir alle $i \in \mathbb{Z}_n$. Beskou die drie Latynse vierkante

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad L_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (1)$$

as voorbeelde. L_1 , L_2 en L_3 is paarsgewys verskillend, terwyl slegs L_2 en L_3 idempotent is.

Twee Latynse vierkante L en L' is *ortogonaal* indien die geordende pare $(L(i, j), L'(i, j))$ almal verskillend is soos wat i en j oor $\mathbb{Z}_n$ varieer, terwyl 'n Latynse vierkant L *self-ortogonaal* is indien L en L^T ortogonaal is. Ons kort die frase *self-ortogonale Latynse vierkant* deurgaans af deur middel van die akroniem SOLV. In (1) is die vierkante L_1 en L_3 byvoorbeeld ortogonaal, en so ook die vierkante L_2 en L_3 . Die vierkante L_1 en L_2 is egter nie ortogonaal nie, omdat die geordende paar $(L_1(0, 0), L_2(0, 0)) = (L_1(1, 3), L_2(1, 3)) = (0, 0)$ byvoorbeeld herhaal. Die vierkante in (1) is voorts al drie self-ortogonaal (m.a.w. SOLV'e); trouens, $L_2^T = L_3$.

Dit is bekend dat SOLV'e van alle ordes bestaan, behalwe vir $n \in \{2, 3, 6\}$ [9]. Tot onlangs was dit egter nog onbekend op hoeveel verskillende maniere SOLV'e van klein ordes gevorm kan word, totdat Graham en Roberts [21] in 2006 die groottes van die klasse van verskillende SOLV'e en idempotente SOLV'e van ordes $n \in \{4, 5, 7, 8, 9\}$ rekenaarmatig bepaal het, en ook die laasgenoemde klasse in 'n aantal sogenaamde isomorfisme-deelklasse geklassifiseer en die groottes van hierdie deelklasse bepaal het. Ons het hierdie numeriese werk in [12] onafhanklik geverifieer en ook die enumerasies vir dieselfde ordes uitgebrei na isomorfismeklasse van SOLV'e wat nie noodwendig idempotent is nie. Die berekeningskompleksiteit van die werk in [12, 21] is egter sodanig dat die enumerasies nie vir SOLV'e van ordes groter as $n = 9$ uitgevoer is nie. Ons kon egter onlangs die enumerasie van die onderskeie klasse van SOLV'e van orde $n = 10$ op 'n netwerk van rekenars uitvoer, en ons rapporteer die resultate van hierdie parallelle berekeningspoging in die huidige artikel.

Die enumerasie van ekwivalensieklasse van SOLV'e, soos die bogenoemde klasse, is om

verskeie redes belangrik. SOLV'e speel 'n sentrale rol in ontwerpteorie (sien Deel II asook Hoofstuk 7 van Deel V in die gesaghebbende bron [14]) en vind byvoorbeeld neerslag in die skedulering van 'n verskeidenheid sporttoernooie (sien [13] vir 'n toepassing in die skedulering van sogenaamde *gade-vermydende gemengde-dubbels- rondomtalie-tennisttoernooie*). Indien 'n verteenwoordigende SOLV uit elkeen van 'n bepaalde soort ekwivalensieklas van SOLV'e bekend is, kan daar bepaal word op hoeveel essensieel verskillende maniere SOLV-verwante ontwerpe van 'n sekere orde gevorm kan word (byvoorbeeld op hoeveel verskillende maniere *gade-vermydende gemengde-dubbels- rondomtalie-tennisttoernooie* vir 'n spesifieke getal getroude pare geskeduleer kan word).

Afdeling 2 van hierdie artikel bevat 'n aantal basiese definisies waarvolgens SOLV'e in sinvolle ekwivalensieklasse geklassifiseer kan word, asook enumerasie-resultate vir hierdie klasse uit die literatuur. Die algoritme waarvolgens ons die sogenaamde (ry, kolom)-paratopklasse van SOLV'e van orde 10 getel het (die tydrawendste ekwivalensieklas van SOLV'e om te enumereer), word in §3 in detail verduidelik. Die getal (ry, kolom)-paratopklasse van SOLV'e word daarna in §4 gebruik om ander klasse van SOLV'e te tel (sommige van hierdie enumerasies word rekenaarmatig uitgevoer, terwyl ander analities uitgevoer word). 'n Aantal slotopmerkings sowel as sommige idees vir moontlike verdere werk volg in §5.

2. Ekwivalensieklasse van Latynse vierkante

Twee Latynse vierkante L en L' is *isomorf* indien $p(L(i, j)) = L'(p(i), p(j))$, waar p 'n permutasie (bekend as 'n *isomorfisme*) is wat op die versameling $\mathbb{Z}_n$ van simbole in L asook op die rye en kolomme van L toegepas word. Ons noem die versameling Latynse vierkante wat isomorf is aan L die *isomorfismeklas* voortgebring deur L . Die twee Latynse vierkante L_2 en L_3 in (1) is byvoorbeeld isomorf, met

$$p_{2 \rightarrow 3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

as isomorfisme op L_2 toegepas. Dit is interessant dat die versameling van alle idempotente SOLV'e van orde 4 een isomorfismeklas vorm (m.a.w. enige twee idempotente SOLV'e van orde 4 is isomorf), maar dit is natuurlik nie die geval vir SOLV'e van hoër ordes nie. Graham en Roberts [21] het (i) die getal verskillende SOLV'e, (ii) die getal idempotente SOLV'e en (iii) die getal isomorfismeklasse voortgebring deur idempotente SOLV'e vir klein ordes rekenaarmatig getel, en hierdie enumerasies word in die eerste drie kolomme van Tabel 4 vertoon.

n	Graham & Roberts [21]			Burger <i>et al.</i> [12]		
	Verskillende SOLV'e	Verskillende idempotente SOLV'e	Isomorfismeklas voortgebring deur idempotente SOLV'e	Isomorfismeklas voortgebring deur alle SOLV'e	Transposent-isomorfismeklas voortgebring deur alle SOLV'e	(Ry, kolom)-paratopklasse voortgebring deur alle SOLV'e
4	48	2	1	6	5	1
5	1 440	12	2	22	11	1
6	0	0	0	0	0	0
7	19 353 600	3 840	8	3 972	1 986	4
8	4 180 377 600	103 680	8	104 120	52 060	4
9	25 070 769 561 600	69 088 320	283	69 112 956	34 564 884	175

Tabel 4: Enumerasie van verskeie klasse SOLV'e van ordes $n \in \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ [12, 21].

'n Latynse vierkant L kan deur 'n versameling $T(L) = \{(i, j, k) \mid L(i, j) = k \text{ met } i, j, k \in \mathbb{Z}_n\}$ van geordende drietalle voorgestel word. Hierdie drietalle kan op ses verskillende maniere gepermuteer word, wat ses (nie noodwendig verskillende) Latynse vierkante voortbring en wat as die *toegevoegdes* van L bekend staan. Gevolglik is die transponent L^T van enige Latynse vierkant L ook een van die toegevoegdes van L ; hierdie toegevoegde word verkry deur die rolle van die rye en kolomme in L om te ruil. Ons volg die notasie van Dénes en Keedwell [15], waar die toegevoegde van L wat gevorm word deur die rolle van die rye en simbole in L om te ruil, aangedui word deur ^{-1}L , en waar die toegevoegde van L wat gevorm word deur die rolle van die kolomme en simbole in L om te ruil, aangedui word deur L^{-1} . Dit is maklik om aan te toon dat die versameling van alle SOLV'e van 'n spesifieke orde geslote is onder die vorming van toegevoegdes. Die SOLV L_2 in (1), tesame met sy vyf toegevoegdes, vorm byvoorbeeld die twee verskillende SOLV'e $L_2 = (-^1L_2)^T = (L_2^{-1})^T$ en $L_2^T = -^1L_2 = L_2^{-1}$.

Twee Latynse vierkante L en L' is *(ry, kolom)-paratope* van mekaar indien

$$q(L(i, j)) = L'(p(i), p(j)) \text{ of } q(L(i, j)^T) = L'(p(i), p(j)) \quad (2)$$

vir alle $i, j \in \mathbb{Z}_n$, waar q 'n permutasie is wat op die simbole van L of L^T toegepas word, en waar p 'n permutasie is wat op beide die rye en kolomme van L toegepas word. Die drietal permutasies $(p, q, t) \in S_n^2 \times S_2$ word 'n *(ry, kolom)-paratopisme* genoem, waar t 'n binêre skakelaar is wat die rolle van die rye en kolomme van L omruil en waar S_n die simmetriese groep van orde n voorstel. Let op dat die permutasie p in (2) op beide die rye en kolomme van L toegepas word. Indien die permutasie egter in (2) op die rye en simbole toegepas sou word, sou L en L' *(ry, simbool)-paratope* van mekaar wees. Op dieselfde manier is L en L' *(kolom, simbool)-paratope* van mekaar indien die permutasie eerder op die kolomme en simbole toegepas word. Definisies van die konsepte van 'n *(ry, simbool)-paratopisme* en 'n *(kolom, simbool)-paratopisme* is soortgelyk aan dié van 'n *(ry, kolom)-paratopisme*. Ons noem die versameling vierkante wat *(ry, kolom)-paratope* van 'n Latynse vierkant L is, die *(ry, kolom)-paratopklas voortgebring deur L*. Soortgelyke definisies geld vir die *(ry, simbool)-paratopklas voortgebring deur L* en die *(kolom, simbool)-paratopklas voortgebring deur L*. Enige *(ry, kolom)-paratop* van 'n SOLV is weer 'n SOLV, maar dieselfde geld nie noodwendig vir *(ry, simbool)-paratope* of *(kolom, simbool)-paratope* van SOLV'e nie. Daarom is dit sinvol om die *(ry, kolom)-paratopklasse* voortgebring deur die versameling van alle SOLV'e van 'n spesifieke orde te tel, maar dit is nie so sinvol om *(ry, simbool)-paratopklasse* of *(kolom, simbool)-paratopklasse* wat deur die versameling van alle SOLV'e voortgebring word, te tel nie.

Twee SOLV'e L en L' is *transponent-isomorf* indien L' isomorf is aan L of L^T , en die versameling van alle vierkante wat transponent-isomorf is aan 'n Latynse vierkant L , word die *transponent-isomorfismeklas voortgebring deur L* genoem. Elke *(ry, kolom)-paratopklas* voortgebring deur 'n SOLV bevat, as deelklas, presies een transponent-isomorfismeklas wat deur 'n idempotente SOLV voortgebring word, en daarom is die getal *(ry, kolom)-paratopklasse* voortgebring deur alle SOLV'e gelyk aan die getal transponent-isomorfismeklasse voortgebring deur idempotente SOLV'e, vir enige orde. Aangesien Graham en Roberts aandui watter idempotente SOLV'e isomorf is aan hulle transponente, is dit moontlik om die getal *(ry, kolom)-paratopklasse* voortgebring deur alle SOLV'e van enige orde $n \in \{4, 5, 7, 8, 9\}$ daaruit af te lei. Indien een isomorfismeklas die transponent van 'n SOLV in 'n ander isomorfismeklas bevat, word die betrokke twee isomorfismeklasse saam as een transponent-isomorfismeklas getel. Die getal *(ry, kolom)-paratopklasse* voortgebring deur alle SOLV'e wat op hierdie manier verkry word, word in die laaste kolom van Tabel 4 vertoon. Die voorafgaande twee kolomme waardes in die tabel kan relatief maklik uit die laaste kolom waardes afgelei word, soos in [12] beskryf.

3. Enumerasie van (ry, kolom)-paratooptklasse van orde 10

Ons het 'n diepte-eerste boomsoektog met terugkering (Eng: *backtracking*) gebruik om die getal (ry, kolom)-paratooptklasse te bepaal wat voortgebring word deur die versameling van alle SOLV'e. Hierdie enumerasie-benadering is konstruktief in die sin dat dit ons ook in staat gestel het om 'n databasis van gepaste, verteenwoordigende SOLV'e in elke (ry, kolom)-paratooptklas op te bou. Verskeie snoeireëls is gebruik om die soekboom so klein as moontlik te snoei en ons sodoende in staat te stel om selfs die (ry, kolom)-paratooptklasse voortgebring deur SOLV'e van orde 10 te tel. Voordat ons die werking van hierdie snoeireëls verduidelik, benodig ons eers 'n aantal basiese definisies.

'n *Universaal* in 'n Latynse vierkant L van orde n is 'n permutasie wat die versameling posisies van al n inskrywings van 'n spesifieke simbool in L vasvang in die sin dat die betrokke simbool in ry i in kolom u_i voorkom indien die universaal van daardie simbool die permutasie

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ u_0 & u_1 & u_2 & \dots & u_{n-1} \end{pmatrix}$$

is. Daarenteen is 'n *transversaal* van L 'n permutasie wat die posisies van die inskrywings van n verskillende simbole in verskillende rye en kolomme van L vasvang. Die universaal geassosieer met die simbool 0 in die SOLV

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

is byvoorbeeld $u(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Die permutasie $t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ is 'n voorbeeld van 'n transversaal van L_1 ; die posisies van inskrywings wat deur hierdie transversaal vasgevang word, word in (3) in vetdruk vertoon.

Daar word gesê dat 'n permutasie a van orde n van tipe $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ is indien dit a_i siklusse van lengte i het, vir alle $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Die notasie $1^{a_1} 2^{a_2} 3^{a_3} \dots n^{a_n}$ word dikwels as alternatief vir $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ gebruik wanneer daar na hierdie tipe permutasie verwys word, met die konvensie dat 'n faktor van die vorm i^{a_i} uit hierdie notasie weggelaat word indien $a_i = 0$ vir een of ander $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Die bostaande universaal $u(0)$ en transversaal t het elk een siklus van lengte 1 en een siklus van lengte 3. Gevolglik is albei hierdie permutasies van tipe $(1, 0, 1, 0)$, oftewel tipe $1^1 3^1$.

Die leksikografies kleinste permutasie van 'n spesifieke tipe word die *verteenvoordigende permutasie* van daardie tipe genoem. Die bostaande transversaal $t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ is byvoorbeeld die verteenwoordigende permutasie van tipe $(1, 0, 1, 0)$, oftewel tipe $1^1 3^1$. 'n Permutasie-tipe $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ is *kleiner* as 'n permutasie-tipe $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ indien $a_i > b_i$ vir een of ander $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ en $a_j = b_j$ vir alle $1 \leq j < i$.

Om te verseker dat daar slegs een SOLV vanuit elke (ry, kolom)-paratooptklas in ons boomsoektog gegenereer word, is dit nodig om 'n rangorde onder SOLV'e te definieer sodat daar verwys kan word na 'n unieke kleinste SOLV in 'n klas. Gegee twee SOLV'e L en L' van orde n , laat $u(i)$ en $u'(i)$ onderskeidelik die universele wees wat geassosieer word met die simbole i van L en L' . Dan is L *kleiner* as L' indien $u(i)$ leksikografies kleiner is as $u'(i)$ vir een of ander $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ en $u(j) = u'(j)$ vir alle $0 \leq j < i$. Die kleinste SOLV in 'n (ry, kolom)-paratooptklas word die *klasleier* van daardie klas genoem.

As p 'n permutasie is wat op die rye van 'n SOLV toegepas word, beeld p die universaal

$$u = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ u_0 & u_1 & u_2 & \dots & u_{n-1} \end{pmatrix}$$

op die universaal

$$\begin{pmatrix} p(0) & p(1) & p(2) & \dots & p(n-1) \\ u_0 & u_1 & u_2 & \dots & u_{n-1} \end{pmatrix} = up^{-1}$$

af. Indien p verder op die kolomme van 'n SOLV toegepas word, word u afgebeeld op

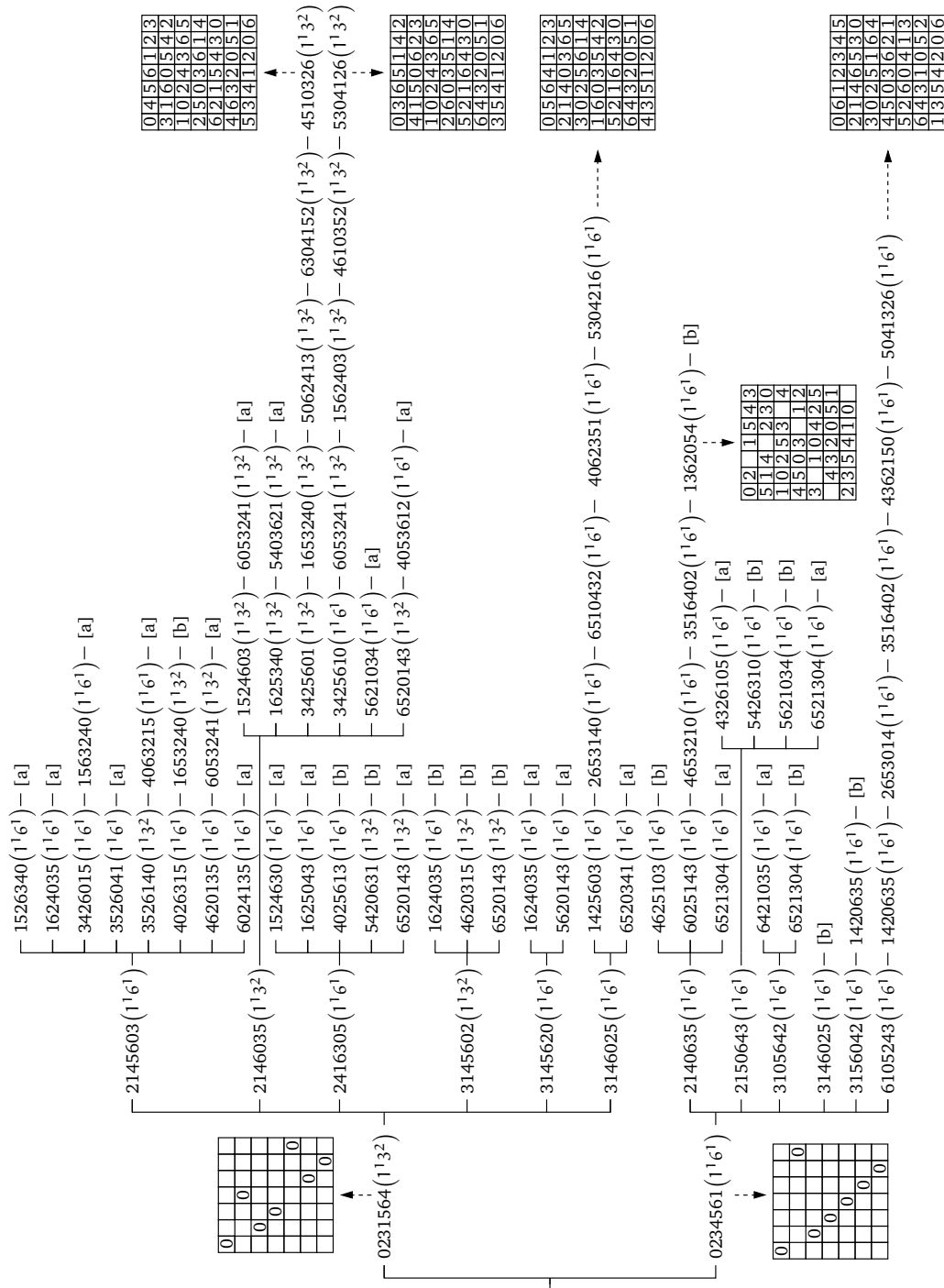
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ p(u_0) & p(u_1) & p(u_2) & \dots & p(u_{n-1}) \end{pmatrix} = pu.$$

As p op beide die rye en kolomme van 'n SOLV toegepas word, word enige universaal u dus afgebeeld op up^{-1} , bekend as 'n *toegevoegde permutasie* van u , en dit is welbekend dat 'n permutasie en enige van sy toegevoegdes dieselfde sikliese struktuur het. Die permutasie p in 'n (ry, kolom)-paratopisme (p, q, t) behou dus die sikliese strukture van die universele van 'n SOLV, waar die permutasie q (wat toegepas word op die simbole van 'n SOLV) die universele herrangskik en t die universele met hulle inverses vervang (wat ook natuurlik die sikliese struktuur behou).

Die gewortelde soekboom wat vir die enumerasie van (ry, kolom)-paratopklasse van orde n opgebou word, vertak by elke vlak op die insluiting van alle moontlike verskillende universele wat met 'n spesifieke simbool geassosieer word, een op 'n slag, en binne-in 'n gedeeltelik voltooië SOLV onder die voorwaardes dat (i) die insluiting van geen universaal die self-ortogonale eienskap van die gedeeltelik voltooië vierkant vernietig nie, en (ii) geen kleiner SOLV reeds in die soekboom bestaan nie. Hierdie proses is op elke vlak van die boom vir 'n ander simbool herhaal totdat óf 'n SOLV ('n klasleier) gevind is, óf die insluiting van geen verdere universele moontlik was nie. Daar is twee eienskappe van die klasleier wat gebruik kan word om die boom te snoei. Eerstens moet die eerste universaal (die universaal geassosieer met die simbool 0) van 'n gedeeltelik voltooië SOLV 'n verteenwoordigende permutasie wees, en tweedens mag geen ander universaal van 'n kleiner tipe wees as die eerste universaal nie. As enigeen van hierdie twee eienskappe nie geld nie, beteken dit (volgens die bostaande bespreking) dat daar 'n (ry, kolom)-paratopisme bestaan wat die huidige gedeeltelik voltooië SOLV afbeeld op 'n kleiner gedeeltelik voltooië SOLV, in welke geval die huidige gedeeltelik voltooië SOLV nie 'n kandidaat vir klasleier kan wees nie en die boom op hierdie punt gesnoei kan word. Indien daar wel aan hierdie twee eienskappe voldoen word, moet daar verder gesoek word na 'n (ry, kolom)-paratopisme wat moontlik die gedeeltelik voltooië SOLV kan afbeeld op 'n kleiner gedeeltelik voltooië SOLV.⁵ Indien so 'n (ry, kolom)-paratopisme gevind word, kan die boom op hierdie punt gesnoei word. Indien nie, is die huidige gedeeltelik voltooië SOLV moontlik 'n kandidaat vir klasleier en kan die soektog voortgesit word.

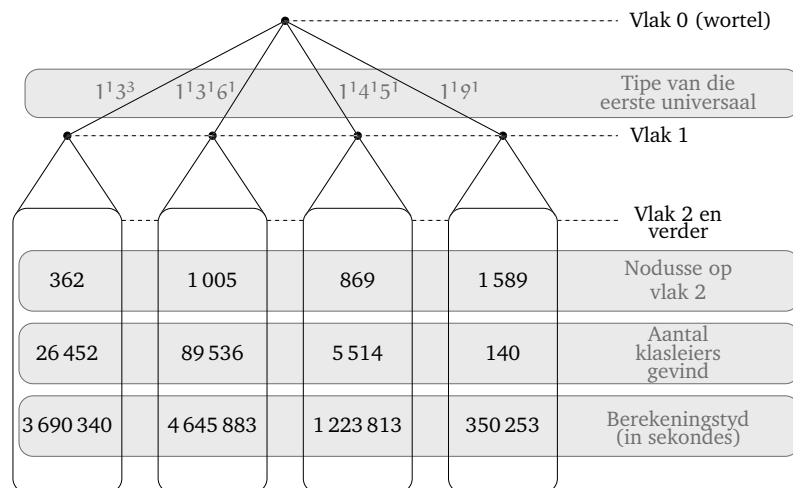
Die soekboom vir orde $n = 10$ is te groot om te vertoon, maar in plaas daarvan kan die veel kleiner soekboom vir orde $n = 7$ ter illustrasie van die soekproses in Figuur 5 gevind word. Die soekboom begin met die leë gedeeltelik voltooië SOLV as wortel (op Vlak 0). In Vlak 1 word daar vertak op die insluiting van alle moontlike universele van die simbool 0, onderhewig aan die snoeireëls soos hierbo beskryf. Let op dat elke universaal van 'n SOLV geen siklus van lengte 2 het nie, aangesien so 'n siklus die ortogonale eienskap van die SOLV sou vernietig. Verder moet daar altyd 'n vaste punt ('n siklus van lengte 1) in 'n SOLV-universaal wees, aangesien elke simbool in $\mathbb{Z}_n$ presies een keer op die hoofdiagonaal van 'n SOLV van orde n voorkom. Dus is die enigste twee transverse

⁵Gestel 'n gedeeltelik voltooië SOLV L se eerste universaal is 'n verteenwoordigende permutasie en die tipe van elke ander universaal is kleiner as dié van die eerste universaal, en ons soek na 'n (ry, kolom)-paratopisme wat L afbeeld op 'n kleiner SOLV. Ons weet ten minste dat die klasleier in L se (ry, kolom)-paratopklas dieselfde eerste universaal het as L , aangesien hierdie universaal 'n verteenwoordigende permutasie is. Dus hoef ons nie deur alle (ry, kolom)-paratopismes te soek nie, maar slegs dié wat die eerste universaal onveranderd laat. Hierdie verkleinde soektog sluit nie net (ry, kolom)-paratopismes in wat die eerste universaal op homself afbeeld nie, maar ook (ry, kolom)-paratopismes wat enige ander universaal op die eerste een afbeeld, mits hierdie universaal natuurlik dieselfde sikliese struktuur het as die eerste een.



Figuur 5: Soekboom vir klasleiers van die (ry, kolom)-paratooptekening van SOLV'e van orde 7. 'n Permutasie van die vorm $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a & b & c & d & e & f & g \end{pmatrix}$ word afgekort as abcdefg. Die tipe van elke permutasie word in ronde hakies vertoon. Klasleiers word uiteindelik vir vier (ry, kolom)-paratooptekeninge gevind in ooreenstemming met die laaste inskrywing in ry 4 van Tabel 4. [a] Die soekboom word gesnoei omdat die invoeging van enige verdere universele die self-ortogonale eienskap sal vernietig. [b] Die soekboom word gesnoei omdat die invoeging van enige verdere universele na 'n SOLV sal lei wat nie 'n klasleier is nie.

wat geldig is, van tipes $1^1 6^1$ en $1^1 3^2$. Die verteenwoordigende permutasies van hierdie tipes is $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ onderskeidelik; die ooreenstemmende gedeeltelik voltooide SOLV'e (na invoeging van die simbool 0) word in Vlak 1 van die soekboom in Figuur 5 vertoon. Die soekproses word voortgesit deur in Vlak 2 van die boom te vertak op die insluiting van alle moontlike universele van die simbool 1, in Vlak 3 te vertak op die insluiting van alle moontlike universele van die simbool 2, ensovoorts, totdat óf 'n SOLV (klasleier) gevind is (deur voltooide vierkante in Figuur 5 aangedui), óf die insluiting van geen verdere universele moontlik is sonder om die self-ortogonale eienskap van die gedeeltelik voltooide SOLV te vernietig nie (hierdie situasie word in die figuur deur die simbool [a] aangedui), óf die boom gesnoei is, m.a.w. waar dit wel moontlik was om verdere universele in die gedeeltelik voltooide SOLV te voeg, maar waar sodanige invoeging sou lei na 'n SOLV wat nie 'n klasleier is nie. Hierdie situasie word in die figuur deur die simbool [b] aangedui en word geïllustreer deur die byna voltooide vierkant in die figuur. Slegs een universaal kan in hierdie byna voltooide vierkant ingevoeg word, naamlik die universaal $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 0 & 1 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, wat met die simbool 6 ooreenstem, hoewel hierdie universaal van tipe $1^1 3^2$ is, wat kleiner is as dié van die ooreenstemmende eerste universaal; gevolglik kan die voltooide vierkant nie 'n klasleier wees nie.



Figuur 6: Gedeeltelike soekboom vir klasleiers van die (ry, kolom)-paratopklasse van SOLV'e van orde 10.

Die konstruksie van die soekboom vir die enumerasie van (ry, kolom)-paratopklasse van orde 10, soos hierbo beskryf, is in C++ geïmplementeer en die berekeninge is op dertig 2.4 GHz Intel(R)-verwerkers (elk met 1 gigagreep geheue) in parallel gedoen. Enkele statistieke van die soekboom vir (ry, kolom)-paratopklasse van SOLV'e van orde 10 word in Figuur 2 vertoon. Daar is 121 642 (ry, kolom)-paratopklasse van orde 10 gevind en klasleiers vir hierdie paratopklasse is elektronies beskikbaar [10]. Die totale (seriale) berekeningstyd om hierdie getal (ry, kolom)-paratopklasse te bepaal, was 9 910 289 sekondes (≈ 115 dae).

4. Enumerasie van ander SOLV-klasse van orde 10

Twee effens aangepaste weergawes van 'n stelling van McKay *et al.* [29] is gebruik om die getal isomorfismeklasse en transponent-isomorfismeklasse te tel wat deur SOLV'e van orde 10 voortgebring word. Voordat hierdie twee stellings bespreek word, word enkele basiese definisies benodig.

'n (Ry, kolom)-outoparatopisme van 'n SOLV L is 'n (ry, kolom)-paratopisme van L wat L op homself afbeeld, terwyl 'n transponent-outomorfisme van L 'n transponent-isomorfisme is wat L op homself afbeeld. Dit kan maklik aangetoon word dat enige (ry, kolom)-outoparatopisme van 'n idempotente SOLV L in werklikheid 'n transponent-outomorfisme van L is. Ons dui die versameling van alle (ry, kolom)-outoparatopismes van 'n idempotente SOLV L aan deur $A(L)$; hierdie versameling speel 'n belangrike rol in die enumerasie van isomorfismeklasse en transponent-isomorfismeklasse voorgebring deur SOLV'e van 'n gegewe orde.

Ons het McKay [28] se rekenaarprogram nauty gebruik om die grootte van die versameling $A(L)$ vir elkeen van die (ry, kolom)-paratopklasleiers L wat in §3 gevind is, te bepaal. Aangesien nauty egter grafieke as toevoer neem en isomorfismegroepe vir hierdie grafieke bereken, het ons met elke SOLV 'n grafiek op só 'n manier geassosieer dat twee van hierdie grafieke isomorf is as en slegs as die ooreenstemmende twee SOLV'e (ry, kolom)-paratope van mekaar is. Meer besonderhede oor die konstruksie van hierdie grafieke kan in [12, 29] nagelees word. Vir $n = 10$ kon ons binne 1 859 sekondes met behulp van nauty aantoon dat 121 456 van die 121 642 (ry, kolom)-paratopklasleiers wat in §3 gevind is, slegs die identiteitspermutasie as transponent-outomorfisme toelaat, dat 176 van hierdie klasleiers elk drie transponent-outomorfismes toelaat, en dat die oorblywende 10 klasleiers elk nege transponent-outomorfismes toelaat. Hierdie inligting oor die groottes van die versamelings (ry, kolom)-outoparatopismes van SOLV'e van orde 10 word in Tabel 5 opgesom; die tabel bevat ook soortgelyke inligting vir SOLV'e van ordes kleiner as $n = 10$.

n	4	5	7	8	9	10
$ A(L) $	24	20	6 42	1 7 8 56	1 2 4 6 8 12 16 72 144	1 3 9
# Groepe	1	1	2 2	1 1 1 1	63 36 42 5 18 4 4 1 2	121 456 176 10
Paratope	1	1	4	4	175	121 642
Tyd (s)	$\ll 1$	$\ll 1$	$\ll 1$	$\ll 1$	1	1 859

Tabel 5: Uiteensetting van die groottes van die (ry, kolom)-outoparatopismegroepe wat met elkeen van die (ry, kolom)-paratopklasleiers van ordes $n \in \{4, 5, 7, 8, 9, 10\}$ ooreenstem asook die gepaardgaande berekeningstye, soos met behulp van nauty [28] bepaal.

Laat $\mathcal{I}_n$ 'n versameling idempotente klasverteenvoordigers wees, met een verteenwoordiger uit elke (ry, kolom)-paratopklas voortgebring deur SOLV'e van orde n . Aangesien daar $2(n!)^2/|A(L)|$ verskillende SOLV'e in die (ry, kolom)-paratopklas is wat voortgebring word deur 'n idempotente SOLV L [6, Stelling 14.3, p. 307], volg dit dat daar in totaal

$$2(n!)^2 \sum_{L \in \mathcal{I}_n} \frac{1}{|A(L)|} \quad (4)$$

verskillende SOLV'e van orde n is. Vir $n = 10$ neem die uitdrukking in (4) volgens die inligting in Tabel 5 die vorm

$$26\,336\,378\,880\,000 \left[\left(121\,456 \times \frac{1}{1} \right) + \left(176 \times \frac{1}{3} \right) + \left(10 \times \frac{1}{9} \right) \right]$$

aan en is daar gevolglik 3 200 285 563 453 440 000 verskillende SOLV'e van orde 10. Verder is die getal verskillende SOLV'e van orde n duidelik 'n faktor $n!$ keer die getal idempotente SOLV'e van orde n , sodat daar in totaal

$$\frac{3\,200\,285\,563\,453\,440\,000}{10!} = 881\,912\,908\,800$$

idempotente SOLV'e van orde 10 is. Om die getal transponent-isomorfismeklasse voortgebring deur SOLV'e van orde n te tel, benodig ons vir enige permutasie α van tipe

$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ die funksie

$$\psi(\alpha) = \prod_{i=1}^n a_i! i^{a_i}$$

waar ons die konvensie volg dat $0! = 1$. Ons haal die volgende stelling, sonder bewys, uit [12, Stelling 3.1] aan.

Stelling 1 Daar is

$$\sum_{L \in \mathcal{I}_n} \frac{1}{|A(L)|} \sum_{\alpha \in A(L)} \psi(\alpha) \quad (5)$$

transponent-isomorfismeklasse wat deur SOLV'e van orde n voortgebring word. ■

Volgens die inligting in Tabel 5 volg dit dus uit (5) vir $n = 10$ dat daar

$$121\,456 \left(\frac{3\,628\,800}{1} \right) + 176 \left(\frac{3\,629\,124}{3} \right) + 10 \left(\frac{3\,629\,178}{9} \right) = 440\,956\,473\,828$$

transponent-isomorfismeklasse is wat deur SOLV'e van orde 10 voortgebring word.

Laat $\mathcal{I}'_n$ die versameling van daardie elemente van $\mathcal{I}_n$ voorstel wat isomorf is aan hulle transponente, en laat $\mathcal{I}''_n = \mathcal{I}_n \setminus \mathcal{I}'_n$. Vervolgens kan Stelling 1 tot die onderstaande resultaat verskerp word waarmee die getal isomorfismeklasse voortgebring deur SOLV'e van orde n getel kan word [12, Stelling 3.2].

Stelling 2 Die getal isomorfismeklasse voortgebring deur SOLV'e van orde n is

$$\sum_{L \in \mathcal{I}'_n} \frac{1}{|A'(L)|} \sum_{\alpha \in A'(L)} \psi(\alpha) + \sum_{L \in \mathcal{I}''_n} \frac{2}{|A(L)|} \sum_{\alpha \in A(L)} \psi(\alpha), \quad (6)$$

waar $A'(L) \subset A(L)$ die versameling van alle transponent-outomorfismes van L voorstel wat nie vir L transponeer nie. ■

Ons kon met behulp van nauty bepaal dat daar geen idempotente SOLV van orde 10 is wat isomorf is aan sy transponent nie. Daarom is $\mathcal{I}'_{10} = \emptyset$ en verval die eerste term in (6). Aangesien $\mathcal{I}_{10} = \mathcal{I}''_{10}$, is die oorblywende tweede term in (6) slegs dubbel die hoeveelheid in (5) vir $n = 10$, en is daar dus $2 \times 440\,956\,473\,828 = 881\,912\,947\,656$ isomorfismeklasse wat deur SOLV'e van orde 10 voortgebring word.

5. Slotopmerkings

In hierdie artikel het ons vier verskillende soorte ekwivalensieklassse van SOLV'e van orde 10 getel, naamlik isomorfismeklasse voortgebring deur idempotente SOLV'e, isomorfismeklasse voortgebring deur alle SOLV'e, transponent-isomorfismeklasse voortgebring deur alle SOLV'e en (ry, kolom)-paratkoopklasse voortgebring deur alle SOLV'e. Ons het Tabel 4 dus uitgebrei deur die addisionele ry wat met $n = 10$ ooreenstem, daarby te voeg, soos opsommenderwys in Tabel 6 vertoon word.

Die berekening van die inskrywings in die laaste kolom van Tabel 6 is verreweg die tydrowendste; hierdie berekeningstye word in Tabel 7 getoon. Nadat hierdie laaste kolom waardes bereken is, kon die ander inskrywings in Tabel 6 betreklik vinnig bepaal word, soos uit die tydwaardes in Tabel 5 duidelik blyk.

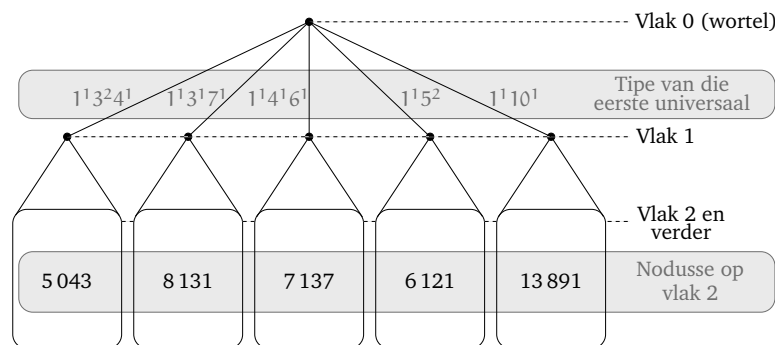
n	Verskillende SOLV'e	Verskillende idempotente SOLV'e	Isomorfismeklasse voortgebring deur idempotente SOLV'e	Isomorfismeklasse voortgebring deur alle SOLV'e	Transporent-isomorfismeklasse voortgebring deur alle SOLV'e	(Ry, kolom)-paratootopklasse voortgebring deur alle SOLV'e
4	48	2	1	6	5	1
5	1 440	12	2	22	11	1
6	0	0	0	0	0	0
7	19 353 600	3 840	8	3 972	1 986	4
8	4 180 377 600	103 680	8	104 120	52 060	4
9	25 070 769 561 600	69 088 320	283	69 112 956	34 564 884	175
10	3 200 285 563 453 440 000	881 912 908 800	243 284	881 912 947 656	440 956 473 828	121 642

Tabel 6: Enumerasie van verskeie klasse SOLV'e van ordes $4 \leq n \leq 10$.

n	Tyd (s)
4-6	$\ll 1$
7	< 1
8	1
9	454
10	9 910 289

Tabel 7: Berekeningstyd (in sekondes) om die getal (ry, kolom)-paratootopklasse voortgebring deur alle SOLV'e van ordes $n \in \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ te bepaal.

Die eksponensieel vinnig groeiende berekeningstye in Tabel 7 is die rede waarom die inskrywings in Tabel 6 voorheen slegs tot by $n = 9$ in die literatuur bekend was; die berekeningspoging hier gerapporteer om die tabel tot by $n = 10$ uit te brei, was beslis nietriviaal – tot die mate dat ons nie verwag dat 'n verdere uitbreiding van Tabel 6 tot $n = 11$ gou die lig sal sien nie. Om die leser 'n aanduiding te gee van die verwagte berekeningskompleksiteit van so 'n verdere uitbreiding, verskaf ons 'n grafiese voorstelling van die grootte van die boonste gedeelte van die soekboom vir orde $n = 11$ in Figuur 7. Daar is 470 nodusse op Vlak 2 van die soekboom vir $n = 9$, terwyl die ooreenstemmende getal nodusse 3 825 vir $n = 10$ is, en 40 323 vir $n = 11$. Dit het gemiddeld minder as een sekonde geneem om daárdie gedeelte van die boom onder 'n enkele nodus op Vlak 2 (op 'n diepte-eerste wyse) vir die geval $n = 9$ te deurstap. Hierdie gemiddelde berekeningstyd het toegeneem tot 2 590 sekondes per nodus op Vlak 2 van die soekboom vir $n = 10$. Indien hierdie groeitendens lineêr geëkstrapoleer word, verwag ons 'n ooreenstemmende gemiddelde berekeningstyd van nagenoeg 6 700 000 sekondes vir elkeen van die 40 323 nodusse op Vlak 2 van die soekboom vir $n = 11$, wat 'n konserwatiewe ondergrens van ongeveer 270 164 100 000 sekondes (≈ 8567 jaar) voor parallelisering vir deurstapping van die soekboom vir $n = 11$ lewer indien dieselfde enumerasie-metodes gebruik word.



Figuur 7: Gedeeltelike soekboom vir klasleiers van die (ry, kolom)-paratootopklasse van SOLV'e van orde 11.

Ons sluit af deur te verwys na twee bekende, onopgeloste bestaansprobleme en spesifiek die relevansie van die werk in die huidige artikel binne die kontekste van hierdie probleme. Die eerste is die probleem om te bepaal of 'n SOLV met 'n simmetriese ortogonale maat (SOLVSOM) van orde 10 bestaan, met ander woorde of dit moontlik is om 'n simmetriese Latynse vierkant van orde 10 te vind wat ortogonaal is aan 'n SOLV van orde 10. Hierdie bestaansprobleem is sedert 1978 onopgelos, soos uit die geskiedenis van werk oor die bestaan van SOLVSOM's in Tabel 8 blyk. Die enigste twee ordes waarvoor die bestaan van 'n SOLVSOM tans onbekend is, is trouens $n = 10$ en $n = 14$. Die werk wat in hierdie artikel vervat is, kan as nuttige tussenstap gebruik word om te bepaal of 'n SOLVSOM van orde 10 bestaan deur vir elkeen van die 121 642 (ry, kolom)-paratooptklasleiers in Tabel 6 te toets of 'n bypassende ortogonale, simmetriese Latynse vierkant gevind kan word.

Jaar	Ordes waarvoor die SOLVSOM-bestaansprobleem opgelos is	Outeur(s)
1978	$n \notin \{10, 14, 39, 46, 51, 54, 58, 62, 66, 70, 74, 82, 87, 98, 102, 118, 123, 142, 159, 174, 183, 194, 202, 214, 219, 230, 258, 267, 278, 282, 303, 394, 398, 402, 422, 1322\}$	Wang [37]
1983	$n \notin \{10, 14, 39, 46, 54, 58, 62, 66, 70, 87, 102, 194, 230\}$	Lindner, Mullin & Stinson [27]
1984	$n \notin \{10, 14, 46, 54, 58, 62, 66, 70\}$	Zhu [39]
1996	$n \notin \{10, 14, 46, 54, 58, 66, 70\}$	Bennet & Zhu [5]
1996	$n \notin \{10, 14, 66, 70\}$	Bennet & Zhu [4]
2000	$n \notin \{10, 14\}$	Abel, Bennet, Zhang & Zhu [1]

Tabel 8: Geskiedenis van die SOLVSOM-bestaansprobleem.

Die tweede bekende probleem is om te bepaal of dit moontlik is om drie Latynse vierkante van orde 10 te vind wat paarsgewys ortogonaal is. Laat $N(10)$ die grootste moontlike getal paarsgewys-ortogonale Latynse vierkante van orde 10 voorstel. Dit is bekend dat $2 \leq N(10) \leq 6$ [26, 32]. Die ondergrens is byvoorbeeld geldig omdat daar SOLV's van orde 10 bestaan, hoewel geen versameling van drie paarsgewys-ortogonale Latynse vierkante van orde 10 nog gevind kon word nie; die vonds van so 'n versameling vierkante sal die ondergrens op $N(10)$ met een opskuif. Een manier om die haalbaarheid van die soeke na so 'n versameling van drie paarsgewys-ortogonale Latynse vierkante van orde 10 te verhoog, sou wees om te fokus op die 121 642 (ry, kolom)-paratooptklasleiers in Tabel 6 en te toets of 'n bypassende ortogonale (nie noodwendig simmetriese) Latynse vierkant vir een van hierdie klasleiers gevind kan word. Indien so 'n bypassende vierkant gevind kan word, kan die beste ondergrens op $N(10)$ tot op hede met een opgeskuif word. Indien geen so 'n bypassende vierkant egter gevind kan word nie, kan daar steeds geen uitspraak gelewer word oor of die ondergrens in die algemeen verbeter kan word al dan nie. McKay *et al.* [29] lewer egter 'n oortuigende argument dat die soektog na drie paarsgewys-ortogonale Latynse vierkante van orde 10 nie in die algemeen aangepak behoort te word deur 'n derde bypassende, ortogonale vierkant vir elke paar ortogonale Latynse vierkante van orde 10 te soek nie. Die rede hiervoor is dat so 'n soekstrategie na hul mening vanweë die groot soekruimte buite die bereik van huidige rekenaartegnologie val.

Verwysings

- [1] R.J.R. Abel, F.E. Bennet, H. Zhang, en L. Zhu. A few more incomplete self-orthogonal Latin squares and related designs. *Australasian Journal of Combinatorics*, 21:85–94, 2000.
- [2] L.D. Andersen. The history of Latin squares. (Ongepubliseerde) Tegniese verslag R-2007-32, Aalborg Universiteit, Aalborg, 2007.
- [3] W.W.R. Ball. *Mathematical recreations and essays*. Macmillan and Company Limited, Londen, 1914.

- [4] F.E. Bennet en L. Zhu. Further results on the existence of HSOLSSOM(h^n). *Australasian Journal of Combinatorics*, 14:207–220, 1996.
- [5] F.E. Bennet en L. Zhu. The spectrum of HSOLSSOM(h^n) where h is even. *Discrete Mathematics*, 158:11–25, 1996.
- [6] N.L. Biggs. *Discrete mathematics*. Oxford University Press, New York, 1985.
- [7] R.C. Bose en S.S. Shrikhande. On the falsity of Euler's conjecture about the non-existence of two orthogonal Latin squares of order $4t + 2$. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 45(5):734–737, 1959.
- [8] R.C. Bose, S.S. Shrikhande, en E.T. Parker. Further results on the construction of mutually orthogonal Latin squares and the falsity of Euler's conjecture. *Canadian Journal of Mathematics*, 7(2):189–203, 1960.
- [9] R.K. Brayton, D. Coppersmith, en A.J. Hoffman. Self-orthogonal Latin squares of all orders. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 80(1):116–118, 1974.
- [10] A.P. Burger, M.P. Kidd, en J.H. van Vuuren. A repository of self-orthogonal Latin squares. <http://www.vuuren.co.za/> → Repositories.
- [11] A.P. Burger, M.P. Kidd, en J.H. van Vuuren. A graph-theoretic proof of the non-existence of self-orthogonal Latin squares of order 6. *Discrete Mathematics*, in druk, 2010.
- [12] A.P. Burger, M.P. Kidd, en J.H. van Vuuren. Enumeration of isomorphism classes of self-orthogonal Latin squares. *Ars Combinatoria*, in druk, 2010.
- [13] A.P. Burger en J.H. van Vuuren. Skedulering van gade-vermydende gemengde-dubbels- rondomtalie-tennistootnooie. *Die Suid-Afrikaanse Tydskrif vir Natuurwetenskap en Tegnologie*, 28(1):35–63, 2009.
- [14] C.J. Colbourn en J.H. Dinitz. *The CRC handbook of combinatorial designs*. CRC Press, Boca Raton, 1996.
- [15] J. Dénes en A.D. Keedwell. *Latin squares and their applications*. The English University Press, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1974.
- [16] L. Euler. Recherches sur une nouvelle espèce de quarrés magiques. *Verhandelingen uitgegeven door het zeeuwsch Genootschap der Wetenschappen te Vlissingen*, 9:85–239, 1782 (Engelse vertaling deur A. Ho & D. Klyve).
- [17] R.A. Fisher. *Statistical methods for research workers*. Oliver and Boyd, Edinburgh, 1925.
- [18] R.A. Fisher. *The design of experiments*. Oliver and Boyd, Edinburgh, 1935.
- [19] R.A. Fisher en F. Yates. The 6×6 Latin squares. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 30:492–507, 1934.
- [20] M. Gardner. Modeling mathematics with playing cards. *The College Mathematics Journal*, 31(3):173–177, 2000.
- [21] G.P. Graham en C.E. Roberts. Enumeration and isomorphic classification of self-orthogonal Latin squares. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 59:101–118, 2006.
- [22] A. Hedayat. Self-orthogonal Latin square designs and their importance. *Biometrics*, 29:393–395, 1973.

- [23] A. Hedayat. Self-orthogonal Latin square designs and their importance, II. *Biometrics*, 31:755–759, 1975.
- [24] M.G. Kendall. Who discovered the Latin square? *The American Statistician*, 2(4):13, 1948.
- [25] M.P. Kidd. *On the existence and enumeration of sets of two and three mutually orthogonal Latin squares with applications to sports tournament scheduling*. MSc-tesiswerkdokument, Universiteit Stellenbosch, Stellenbosch, 2010.
- [26] C.W.H. Lam, L. Thiel, en S. Swiercz. The non-existence of finite projective planes of order 10. *Canadian Journal of Mathematics*, XLI(6):1117–1123, 1989.
- [27] C.C. Lindner, R.C. Mullin, en D.R. Stinson. On the spectrum of resolvable orthogonal arrays invariant under the Klein group K_4 . *Aequationes Mathematicae*, 26:176–183, 1983.
- [28] B.D. McKay. nauty. <http://cs.anu.edu.au/~bdm/nauty>.
- [29] B.D. McKay, A. Meynert, en W. Myrvold. Small Latin squares, quasigroups and loops. *Journal of Combinatorial Designs*, 15:98–119, 2007.
- [30] K. Meagher. Quilting. <http://www.math.uregina.ca/~kmeagher/quilt.html>.
- [31] N.S. Mendelsohn. Latin squares orthogonal to their transposes. *Journal of Combinatorial Theory Series A*, 11:187–189, 1971.
- [32] E.T. Parker. Orthogonal Latin squares. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 45:859–862, 1959.
- [33] R. Stegmann. Rob's puzzle page. <http://home.comcast.net/~stegmann/home.htm>.
- [34] G.P.H. Styan en C. Boyer. Some comments on Latin squares and on Graeco-Latin squares, illustrated with postage stamps and old playing cards. *Statistical Papers*, 50:917–941, 2009.
- [35] G. Tarry. Le probleme des 36 officiers. *Compte Rendus Association Franqaise pour l'Avancement des Science*, 29(2):170–203, 1900.
- [36] P. Ullrich. Officers, playing cards, and sheep. *Metrika*, 56:189–204, 2002.
- [37] S.P. Wang. *On self-orthogonal Latin squares and partial transversals of Latin squares*. PhD-proefskrif, Ohio State University, Columbus, 1978.
- [38] P.K. Yadav. Beast and its beauty. <http://troolyunbelievable.blogspot.com/2007/12/beast-and-its-beauty.html>.
- [39] L. Zhu. A few more self-orthogonal Latin squares with symmetric orthogonal mates. *Congressus Numerantium*, 42:313–320, 1984.

Ontvang 29 Augustus 2010; geplaas 22 Oktober 2010.