Naasbeste benadering met gladstrykers

C.H. Rohwer
Universiteit Stellenbosch

Summary

When formalising the art of smoothing data it is convenient to introduce the concept of a separator, as an operator that separates a given sequence x of data into that which is required (Sx, or the signal) and that to be eliminated ($x - Sx$, or the noise). For linear smoothers projections often suffice. In this case we automatically have that Sx is a best approximation in the 2 norm to x, from the vector space that is the range of S. The Lebesgue Inequality ensures near best approximation in other norms.

When smoothers are general, or non-linear, one can generalise this projection into a separator. In the $\mathcal{LULU}$ theory of smoothers all compositions of the basic $\mathcal{LULU}$ operators are such that Sx is still a near best approximation to x from the range of S.

In this article relevant established results are summed up that prove precisely this; all operators like S have Sx between two approximations $\mathcal{UL}x$ and $\mathcal{LU}x$ to x, which have the same image sets. Best approximations from these image sets exist in all the p norms for sequences, and $\mathcal{LU}x$, $\mathcal{LU}x$ and Sx yield approximation errors bounded by the same Lebesgue-type factor and the best-approximation error.

The new results that are derived in this article are, firstly, that $\mathcal{UL}x$ and $\mathcal{LU}x$ always have approximation errors inside a factor of two from each other and, secondly, that there is a derivable approximation, which is between these two, which does not approximate more badly. Important implications for choices in Discrete Pulse Transforms are derived.

Opsomming

As die kuns van gladstryking van data geformaliseer word, is dit nuttig om die konsep van 'n skeier (separator) in te voer as 'n operator S wat 'n gegewe ry x skei in dit wat benodig word Sx, of die sein, en dit wat verwyder moet word, of die geraas. Vir lineêre gladstrykers sal projeksies dikwels genoegsaam wees. In hierdie geval is Sx outomaties 'n beste benadering in die 2-norm tot x, vanuit die beeldruimte van S. Die Lebesgue-ongelykheid verseker naasbeste benadering in ander norme.

As die gladstrykers algemeen, of nielineêr, is, kan mens hierdie projeksies veralgemeen tot separators. In die $\mathcal{LULU}$-teorie van gladstrykers is alle komposisies S van die basiese $\mathcal{LULU}$-operatore sodanig dat Sx steeds naasbeste benaderings, uit die beeldruimte van S, tot x gee.

In hierdie artikel word relevante gevestigde resultate opgesom wat presies dit bewys: alle operatore soos S het Sx tussen twee benaderings $\mathcal{UL}x$ en $\mathcal{LU}x$ tot x, wat dieselfde

ISSN 1995-5928 | Tel: 021 886 5169 | E-pos: akademies@litnet.co.za

beeldversamelings het. Beste benaderings vanuit hierdie beeldversameling bestaan in al die gewone p-norme vir rye, en ULx, LUx en Sx lewer benaderingsfoute begrens deur dieselfde Lebesgue-agtige faktor en die beste benaderingsfout.

Die nuwe resultate wat in hierdie artikel afgelei word, is eerstens dat ULx en LUx altyd benaderingsfoute binne 'n faktor 2 van mekaar het, en tweedens dat daar 'n afleibare benadering in dieselfde beeldversameling lê, wat tussen ULx en LUx is, en nie swakker as albei benader nie. Belangrike implikasies vir keuses in Diskrete-Puls-Transforms word afgelei.

Extended abstract

Defining a primitive n pulse as a sequence that is zero elsewhere and constant on an index set $i+1, i+2, \ldots, i+n$, such sequences are significant in the so-called LULU theory of smoothers. The fundamental pair of LULU smoothers U_nL_n and L_nU_n map such n pulses onto the zero sequence θ. Since smoothers often have to be non-linear, it is unclear how they will recover an underlying signal s from a sequence $x = s + \nu$, where ν is a sequence of such pulses contaminating s. Often such pulses can be partially removed by removing any "bulge" or "pit" that is respectively larger or smaller than neighbours, in the sequence x. This is done by U_nL_n and L_nU_n, but since they are non-linear there is a fundamental ambiguity involved. Considering the simplified case, of a constant section in x, a pulse will be removed by both. If two pulses are adjacent they are, in principle, indistinguishable from a $2n$ pulse and will not be removed by either. If the two pulses are near each other it is uncertain whether this perhaps constitutes a longer upward pulse with a downward pulse superimposed. In this case $U_nL_nx < L_nU_nx$, and this separation of the LULU interval of x, indicates this fundamental uncertainty in interpretation [5]. In general, where there is trend in x, $U_nL_nx = L_nU_nx$ indicates this.

The well-known median smoothers M_n, popularised by Tukey in various compositions, yield a sequence between; $U_nL_nx \leqslant M_nx \leqslant L_nU_nx$ [3]. The common range of the operators U_nL_n and L_nU_n is fundamental in the theory, and can be shown to be precisely that set of "roots" of the median smoothers M_n which are absolutely summable. This set consists of n-monotone sequences x, which are such that $\{x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n+1}\}$ is monotone increasing (non-decreasing) or monotone decreasing (non-increasing) for each index i. Clearly they contain no "bulges" or "pits" of width less than, or equal to, n.

In the selection of a smoother S for a specific task, it is of serious, if secondary, consideration whether the smoothed sequence Sx is a good approximation to x, since we can seldom be sure to obtain x exactly from the contaminated sequence $s = x + \nu$. With linear smoothers it is easy to resort to the theory of Digital Filters, where the use of the usual inner product yields the convenient 2 norm. In such a case the projections are ideal, not only consistently separating a sequence into signal and noise, but also ensuring that the image is a best approximation in the 2 norm. The Lebesgue Inequality ensures that the image is also a near-best approximation in the other usual p norms, provided the relevant operator norm is bounded.

Long ago Bovic and Restrepo [1] showed that there are best approximations in the monotonicity classes forming the range of U_nL_n and U_nL_n, but that these need not be unique. Critical advances later came from the realisation that non-linear operators cannot be projections, but the concept of projection can be generalised to that of a separator S, such that S is idempotent ($S^2 = S$) and co-idempotent ($(I - S)^2 = I - S$). All compositions of the basic LULU operators L_n and U_n are separators, and without the use of

ISSN 1995-5928 | Tel: 021 886 5169 | E-pos: akademies@litnet.co.za

projections, a set of Lebesgue-type inequalities were proved for U_nL_n and L_nU_n, and all operators mapping into the interval of ambiguity $[U_nL_nx, L_nU_nx]$. This was done for all the usual p norms, and used minimal Lipschitz constants [5]. Further results proved that no subsequent smoothing with LULU operators could improve the approximations in two important norms. [4] [6].

Subsequent research revealed the natural norms of smoothing, specifically for image processing, to be the Total Variation and the 1 norm. Particularly the Total Variation, which becomes a norm in the vector space of absolutely summable functions,as $T(x) = \Sigma|x_{i+1} - x_i| \leqslant \|x\|_1$, is natural in LULU theory. This is mainly due to the fact that, whenever S is a composition of LULU smoothers, it is a separator and is Variation Preserving in the sense that

$$T(x) = T(Sx) + T((I - S)x).$$

A Discrete Pulse Transform (DPT), and the computationally fast version called a Fast Pulse Transform or Roadmaker Algorithm, is a sequential smoothing of a sequence x with smoothers S_i, given by $S_{n-1}S_{n-2}\cdots S_1x = S_nS_{n-1}\cdots S_1x + r_n(x)$, with $r_n(x)$ as the n-th resolution component.

With a sequence x with support in $[1, N]$ this yields $x = \sum_{i=1}^{N} r_i(x)$, and $T(x) = \sum_{i=1}^{N} T(r_ix)$, which is a "pulse spectrum" of x, or a type of Parseval Identity, as found in the Fourier or Wavelet Transforms.

Given the task of selecting a DPT for a specific task, a natural trade-off associated with the interval of ambiguity $[U_nL_n, L_nU_n]$ presents itself. In choosing either $S_n = L_nU_n$ or $S_n = U_nL_n$ we may find that the pulse spectrum is loaded towards the higher resolution levels like $T(r_1(x))$ and $T(r_2(x))$, or towards the lower resolution levels like $T(r_N(x))$ and $T(r_{N-1}(x))$ etc. In the same way the power spectrum of a sequence gives information on the design of a linear smoother, for a given task. We can select a smoother to eliminate the first resolution levels, with the motivation that this is populated primarily by pulses resulting from additive noise that is identically independently generated by a distribution [5]. Additionally we could eliminate underlying trend, or drift, by omitting lower resolution levels. It is important to consider whether we go for the better approximation, or for the removal of as much expected noise as possible.

This article surveys the approximation problems already solved, and presents new important results.

The essence of the established results is that best approximations, in the common range $\mathcal{M}_0$ of L_nU_n and U_nL_n to a given sequence x exist, and both the operators give near-best approximations that do not exceed a Lebesgue-type constant in error, relative to a best approximation. The same factor is applicable to any operator mapping into the interval $[U_nL_nx, L_nU_nx]$. This is true in any of the usual p norms. Stated as a theorem it gives the following.

Theorem. Let $x \in \mathcal{M}_0$ and $\|\cdot\|_p$ the usual p norm. Then, for each $y \in M_n$, and P any operator mapping into the LULU interval $[U_nL_nx, L_nU_nx]$, we have

$$\|Px - y\|_p \leqslant (2n+1)^{\frac{1}{p}}\|x - y\|_p.$$

Two important observations are that this is clearly true also if y is a best approximation, and that the optimality of the bound $(2n+1)^{\frac{1}{p}}$ is not established.

An old question is whether a best approximation is always in this LULU interval. Experience suggests that the two sequences U_nL_nx and L_nU_nx are competitive, and very easy

ISSN 1995-5928 | Tel: 021 886 5169 | E-pos: akademies@litnet.co.za

to compute, particularly in a DPT. The new results derived and presented in this article are the following. A theorem is presented and proved, which demonstrates that, provided x is in $\mathcal{M}_{n-1}$, the two approximations U_nL_nx and L_nU_nx differ in approximation error by a ratio of at most 2 or $\|L_nx - x\| \leqslant 2\|L_nU_nx - x\| \leqslant 4\|U_nL_nx - x\|$. Suggested by this result, a related smoother W_n is defined and proved to be as good an approximation as both, and therefore in general better. All this is done for the two norms that are arguably natural for the LULU theory and its applications: the 1 norm and the Total Variation norm. Some important implications of this result for the selection of smoothers for a DPT are discussed. Experience suggests that the best approximation in $\mathcal{M}_n$ to a sequence $x \in \mathcal{M}_{n-1}$ is actually better by a factor of not more than 2 to either U_nL_nx and L_nU_nx, and that W_n is therefore easily mistaken for a best approximation. The question of why this approximation W_nx is not always a best approximation is given new life, with an argument as to why a best approximation, where it differs from W_nx, is not to be preferred.

On requiring a natural additional attribute of the best approximation, it may well be inside the LULU interval. This is stated as a conjecture.

Inleiding

Die fenomenale vooruitgang in tegnologie, en spesifiek in die sensortegnologie, het 'n eienaardige probleem laat ontstaan: 'n oorvloed van metingsdata. Ons voorvaders in die wetenskap sou dit beswaarlik kon vooruit sien, veral nie in die omgewing van die enorme rekenaarkapasiteit en spoed wat beskikbaar is nie. As voorbeeld kan sensitiewe versnellingsmeters beskou word, wat veroorsaak dat een internasionale aardbewingsnavorsingsmaatskappy in een sekonde meer aardbewingsdata versamel as die totale mensdom tot 1980. Aardbewings is fraktaal van aard, sodat die kleintjies ewe beduidend vir navorsing en interpretasie beskou kan word.

Vanaf kosmologie tot fundamentele partikelfisika ontstaan soortgelyke probleme: ontsettend hoë resolusie van meetinstrumente, rekenaarspoed en teorie vir interpretasie. Wat is die probleem?

Interpretasie is die beperking. Elkeen wat toegang tot die inkomende data het kan hoogstens 'n paar aspekte op 'n slag ondersoek, en juis die oorvloed data kan dit wat waargeneem moet word, verswelg. Een persoon wil 'n betrokke aardbewing se aankomstye by verskillende sensore bepaal om dit te lokaliseer, terwyl 'n ander sy energievrystelling oor tyd bestudeer. Om hierdie rede is daar huidig 'n wye belangstelling in Multiresolusie-Analise (MRA). Dikwels is die probleem ook baie dringend, waar mens vinnig moet reageer, byvoorbeeld om 'n myn betyds te ontruim wanneer 'n rotsbarsting, wat maar net 'n klein aardbewing is, veiligheid bedreig.

Wiskundig kan ons dit vereenvoudig deur 'n stel metings as 'n ry x van getalle x_i beskou, wat natuurlik eindig is, maar gemaklik algemeen hanteer kan word deur byvoorbeeld nulle voor en agter aan te heg sodat die 1-norm van x bestaan.

Ons kan dus navorsing in "skeiers" ("separators") S motiveer. Dit is operatore, of berekeningsalgoritmes, wat data soos x skei in Sx, of dit wat vir 'n spesifieke doel nodig is, en die res $x - Sx$. Mens kan dit na analogie van 'n spesifieke isotoopskeiding betrag. Deur parallelisering kan mens algemeen 'n stel reële digitale tydrye op 'n slag betrag. Hierdie ondersoek het begin by die ondersoek na gladstrykers ("smoothers"), waar histories die lineêres (filters) deeglik bestudeer is, meesal vir die ontwikkeling van oudiotransmissie.

ISSN 1995-5928 | Tel: 021 886 5169 | E-pos: akademies@litnet.co.za

In sy eenvoudigste vorm wil mens byvoorbeeld hoë frekwensie en lae frekwensie skei. Heel natuurlik het daaruit gevolg dat mens "geraas" van verskeie tipes met hierdie metodes as ongewens kan verwyder, meestal natuurlik net binne perke. Dit is dan ook natuurlik dat mens komposisies van sulke skeiers kan gebruik om byvoorbeeld eers "sein" van "geraas" te probeer skei, en dan die deel van die sein wat dringend relevant is van die res. Dit lei tot 'n vorm van Multiresolusie-Analise (MRA), deurdat S_1 gekies word as 'n skeier wat hoë-resolusie-detail afskil sodat $x = S_1x + (x - S_1x)$, met $R_1 = x - S_1x$ wat as eerste resolusievlak beskou kan word. Dan word die "gladder" gedeelte S_1x weer geskei deur S_2 te kies om S_1x op te breek in S_2S_1x en die tweede resolusievlak $R_2 = S_1x - S_2S_1x$. Dit word voortgesit sover as benodig. Deur die resolusiekomponente te betrag, kan dan besluit word oor wat benodig word as sein Sx, en watter van die verskillende resolusievlakke verander of weggelaat word. Klaarblyklik kom 'n benaderingsprobleem te voorskyn. Sx word gesoek wat eenvoudiger of "gladder" is, en die essensiële benodigde informasie nog genoegsaam benaderd bevat. Die fout $x - Sx$ moet dus nie te groot wees in vergelyking met ander, moontlik beter benaderings van dieselfde tipe nie.

Met die koms van digitale tegnologie het nog 'n probleem ontstaan, wat mens losweg die probleem van impulsiewe geraas kan noem. Daar kan byvoorbeeld elke nou en dan 'n enkele reuse-getal deur 'n transmissiefout ontstaan wat glad nie vergelykbaar met sy onmiddellike bure is nie. Dit sal glad nie help om elke punt met die gemiddelde van hom en sy twee bure te vervang nie, wat 'n eenvoudige lineêre gladstryking sou wees. Lineêre gladstrykers, en hul gepaardgaande lineêre teorie, is nie toepaslik nie. Wesentlik sê Heissenberg se onsekerheidsbeginsel, wat in hierdie konteks suiwer wiskundig gesien kan word: 'n kort puls het 'n wye spektrum. Verder is ook skielike veranderings van grootte lastig en produseer hulle, as impulse in die differensies, ook sintetiese artifakte in terme van lokale ossilasies. Daar moes noodwendig na nielineêre gladstrykers gekyk word. Dit is min of meer in twee pogings te klassifiseer: die Robuuste Statistiek en die meer pragmatiese, praktiese pogings. Tukey en ander het mediaangladstrykers as voorgladstrykers gebruik om impulsiewe geraas te verwyder, gevolg deur bekende lineêre tegnieke vir die oorblywende.

'n Teorie is gesoek, en hoewel Mallows basiese aksiomas gekies het wat baie sinvol was, was die konsensus dat so 'n teorie van nielineêre gladstrykers moeilik te vind is, indien nie onmoontlik nie. Oorspronklik naïef ten opsigte van ander pogings, is LULU-teorie in die afgelope drie dekades uit praktiese toepassings ontwikkel. Later het dit duidelik geword dat die operatore, wat sentraal is in die teorie, spesifieke eenvoudige morfologiese filters is. Hulle het egter baie sterk spesifieke eienskappe wat ontbloot is deur 'n ander perspektief. Hulle is ook deur sterk ongelykhede verwant aan die mediane wat deur Tukey populêr geword het, sodat baie van die goeie maar "enigmatiese" gedrag van die mediane verstaanbaar word. Die heel eerste artikel in die *Journal of Approximation Theory* het vinnige benadering met lokaalmonotone rye behandel. 'n Latere artikel het bewys dat fundamentele LULU-gladstrykers, sowel as baie verwante gladstrykers, almal naasbeste benaderings gee met betrekking tot die beeldruimtes van die operatore. Die belangrikheid hiervan is duidelik dat die eenvoudige, lokale gladstrykingsoperatore benaderings gee wat, binne 'n vaste faktor, 'n nie baie slegter benadering gee as 'n "beste benadering". Dit geld in elk van die gewone p-norme. Bovic en Restrepo het bewys dat sulke beste benaderings bestaan, maar hul konstruksies was berekeningsduur en nielokaal.

Hierdie resultaat is as genoegsaam beskou totdat dit duidelik geword het dat die Totale Variasie die natuurlike norm is in die gladstrykerteorie. Die sterkste motivering het oorspronklik gekom van die ontdekking dat alle LULU-gladstrykers nie net Totale Variasie verminder nie, maar in die som van die Totale Variasie van sy skeidingskomponente presies behou, net soos Pythagoras se stelling die kwadrate van die 2-norm van 'n lineêre projeksie behou. Dit suggereer die gebruik daarvan in 'n teorie van gladstryking, deurdat rekursief gladgestryk kan word met 'n presiese maatstaf van hoeveel van die Totale Vari-

ISSN 1995-5928 | Tel: 021 886 5169 | E-pos: akademies@litnet.co.za

asies van die oorspronklike ry reeds verwyder is. Dit is wat in die teorie van lineêre filters met die 2-norm se kwadraat gedoen word met die Parseval-identiteit.

Van al die gewone p-norme is die 1-norm die mees robuuste. Die relevante norme in die teorie van nielineêre gladstrykers kan dus as die 1-norm en Totale Variasie beskou word, en daar is verskeie sterk verbande tussen die twee norme afgelei.

In hierdie artikel word belangrike bestaande resultate oor die benaderingseienskappe van $LULU$-gladstrykers, sowel as verwante operatore soos die mediane, verduidelik. Verder word lank bestaande vrae oor die benadering in die Totale Variasie-norm, en die 1-norm, ondersoek en sommiges opgeklaar. Hoewel die redenasies en bewysmetodes vreemd is vir enigiemand wat met die gewone vektorruimtes en lineêre teorie vertroud is, is die argumente basies en eenvoudig om te interpreteer. Bowenal is dit nuttig vir sommige keuses vir 'n Diskrete-Puls-Transform (DPT).

1. Basiese resultate vir komposisies van min.- en maks.-operatore

Laat $\mathcal{M}_0 = \ell_1$ die bekende vektorruimte wees van rye wat absoluut sommeerbaar is met die gewone definisies van sommering en skalaarvermenigvuldiging. Die p-norme, vir $p = 1, 2, 3, \ldots$, sowel as die sup-norm ($p = \infty$), sal dan ook bestaan. Addisioneel sal die T-norm as $T(x) = \Sigma|x_{i+1} - x_i|$, wat maar net die totale variasie van x is, gedefinieer word, aangesien dit oënskynlik natuurlik is in hierdie analise.

In die teorie wat volg, is die verskillende ordes en parsiële ordes gebaseer op die gewone volledige orde op die reële getalle R.

Definisie 1:

(a) Gegee $x, y \in \mathcal{M}_0$. Dan is $x \leqslant y$ as en slegs as $x_i \leqslant y_i,\ \forall i$.

(b) Laat S, G operatore wees wat $x \in \mathcal{M}_0$ afbeeld op $Sx \equiv S(x) \in \mathcal{M}_0$ en $Gx \equiv G(x)$ respektiewelik. Dan is $S \leqslant G$ wanneer. $Sx \leqslant Gx,\ \forall x \in \mathcal{M}_0$.

(c) Die operator S is monotoon as dit orde tussen x en y behou, of

$$x < y \ \Rightarrow\ Sx \leqslant Sy.$$

In die Wiskundige Morfologie *(Mathematical Morphology (MM))* word die term *monotoon* gebruik, en ons sal dit ook hier gebruik, hoewel in die ontwikkeling van $LULU$-teorie die term sintoon gebruik is, na aanleiding van Lothar Collatz se gebruik.

(d) Die operator S is buurordebehoudend *(neighbour trend preserving (ntp))* as

$$\forall i,\ x_i < x_{i+1} \ \Rightarrow\ (Sx)_i \leqslant (Sx)_{i+1} \quad \text{en} \quad x_i = x_{i+1} \Rightarrow (Sx)_i = (Sx)_{i+1}.$$

Die volgende eenvoudige operatore is fundamenteel in die teorie van gladstrykers [5].

Definisie 2:

(a) Die "skuif-operator" E is sodanig dat vir $x \in \mathcal{M}_0$, $(Ex)_i = x_{i+1}$, vir elke indeks i.

ISSN 1995-5928 | Tel: 021 886 5169 | E-pos: akademies@litnet.co.za

(b) Die identiteitsoperator I beeld $x \in \mathcal{M}_0$ af op homself, en die nul-operator 0 beeld $x \in \mathcal{M}_0$ af op die nulry (nulvektor) in $\mathcal{M}_0$. Vir enige operator A is $A^0 \equiv I$.

(c) Die negasie-operator N beeld $x \in \mathcal{M}_0$ af op $-x$.

(d) Die maks. operator $\bigvee$ beeld $x \in \mathcal{M}_0$ af op $\bigvee x$, sodat $(\bigvee x)_i =$ maks$\{x_i, x_{i+1}\}$

(e) Die min. operator $\bigwedge$ beeld $x \in M_0$ af op $\bigwedge x$, sodat $(\bigwedge x)_i = \min\{x_{i-1}, x_i\}$.

(f) Vir twee operatore S en G is die komposisie SG sodanig dat $(SG)x = S(Gx)$, vir elke $x \in \mathcal{M}_0$. Die som en skalaarveelvoude van S en G word soos gebruiklik gedefinieer.

(g) Die mediaan-operator M_n gee vir elke $x \in \mathcal{M}_0$ dat

$$(M_n x)_i = \text{ mediaan } \{x_{i-n}, \cdots, x_i, \cdots, x_{i+n}\}.$$

(h) LULU-operatore is komposisies van operatore van die vorm $L_n = \bigvee^n \bigwedge^n$ en $U_n = \bigwedge^n \bigvee^n$ vir $n \geqslant 0$.

Omdat baie van die operatore ter sprake "gladstrykers" is, word nog 'n paar definisies gegee.

Definisie 3:

(a) Die operator G is 'n gladstryker as $GE = EG$, $G(x+c) = G(x)+c$, waar c 'n konstante ry is, en $S(\alpha x) = \alpha Sx$ vir elke skalaar $\alpha \geqslant 0$.

(b) G is idempotent as $GG = G$ en ko-idempotent as $(I-G)^2 = I-G$, en G is 'n skeier as G idempotent en ko-idempotent is.

(c) G is volledig orde-behoudend *(fully trend preserving ftp)* as G en $I-G$ buurordebehoudend of ntp (neighbour trend preserving) is.

Ter wille van insig is dit duidelik dat 'n gladstryker se eienskappe di van as-onafhanklikheid en skaal-onafhanklikheid is. Dit het eenvoudige heuristiese motiverings.

Die ko-idempotensie is minder bekend, en is maklik heuristies motiveerbaar [5]. Vir lineêre operatore is idempotenisie en ko-idempotensie dieselfde eienskap, maar hier is die fundamentele operatore meestal nielineêr. Die begrip *ko-idempotensie* is wesentlik noodsaaklik in 'n algemene gladstrykingsteorie, en dit is waarskynlik 'n groot leemte in die lank bestaande teorie van wiskundige morfologie dat hierdie begrip nie inslag gevind het nie. (Ronse het dit wel êrens ingevoer, maar die idee is blykbaar algemeen onderskat wat sy waarde betref.) So is die idee van 'n skeier, as veralgemening van 'n projeksie, blykbaar nêrens uitgelig of na waarde geskat nie. Dit is sentraal in LULU-teorie.

Stelling 1:

Vir elke natuurlike getal n is

(a) $\bigwedge^n \leqslant \bigvee^n \bigwedge^n \leqslant I \leqslant \bigwedge^n \bigvee^n \leqslant \bigvee^n$.

(b) $\bigwedge^n = \bigwedge^n \bigvee^n \bigwedge^n$ en $\bigvee^n = \bigvee^n \bigwedge^n \bigvee^n$, die Galois-verband.

(c) $(\bigvee^n \bigwedge^n)^2 = \bigvee^n \bigwedge^n \leqslant (\bigwedge^n \bigvee^n \bigvee^n \bigwedge^n)^2 = \bigwedge^n \bigvee^n \bigvee^n \bigwedge^n \leqslant M_n \leqslant \bigvee^n \bigwedge^n \bigwedge^n \bigvee^n$

$> (\bigvee^n \bigwedge^n \bigwedge^n \bigvee^n)^2 = \bigwedge^n \bigvee^n = (\bigwedge^n \bigvee^n)^2$.

(d) $\bigvee^n \bigwedge^n = \bigvee^n \bigwedge^n \bigvee^{n-1} \bigwedge^{n-1}$ and $\bigwedge^n \bigvee^n \bigwedge^{n-1} \bigvee^{n-1} = \bigwedge^n \bigvee^n$. (Inslukstelling)

ISSN 1995-5928 | Tel: 021 886 5169 | E-pos: akademies@litnet.co.za

(e) Alle komposisies van $\bigvee$ en $\bigwedge$ is monotoon.

Bewys: Die bewys is in die monograaf [5] oor die onderwerp, maar volg maklik uit eerste beginsels. Die insluiting van M_n in die ongelykhede is egter subtiel, maar noodsaaklik.

Stelling 2:

(a) Komposisies van ftp-operatore is ftp.

(b) Alle komposisies van L_n en U_n is ftp.

(c) 'n Operator P wat ftp is, is Variasiebehoudend *(Variation Preserving (VP))* , deurdat $T(x) = T(Px) + T(x - Px)$. P is dus ook variasieverminderend, of strenger gesê, variasie-nietoenemend.

Bewys: Sien [5].

Belangrik om op te let is dat $\bigwedge$ en $\bigvee$ nie ftp, en dus ook nie variasiebehoudend, is nie.

Stelling 3: Laat $\|\cdot\| \equiv \|\cdot\|_1$. Dan geld vir $n = 0, 1, 2, \ldots$ en $k \leqslant n$,

(a) $\|\bigvee^{n+1} x - x\| = \|\bigvee^n x - x\| + \frac{1}{2}T(\bigvee^n x)$ en $\|\bigwedge^{n+1} x - x\| = \|\bigwedge^n x - x\| + \frac{1}{2}T(\bigwedge^n x)$.

(b) $T(\bigwedge^k \bigvee^n x - x) = T(\bigvee^n x - x) - \frac{k}{2}T(\bigvee^n x)$ en $T(\bigvee^k \bigwedge^n x - x) = T(\bigwedge^n x - x) - \frac{k}{2}T(\bigwedge^n x)$.

(c) $T(\bigvee x)$ en $T(x) \geqslant T(\bigvee x) \leqslant T(x)$. Net so is alle komposisies van $\bigvee$ en $\bigwedge$ variasieverminderend.

Bewys: Die stelling is bewys [5], vanaf $2\|\bigwedge x - x\| = T(x) = 2\|\bigvee x - x\|$, 'n fundamentele resultaat, wat eenvoudig en die moeite werd is om te illustreer.

Dit volg deur die som $0 = \Sigma(x_{i+1} - x_i)$ in 'n som van positiewe differensies E_+ en die som van negatiewe differensies E_- te skei sodat $E_- + E_+ = 0$. Omdat $(\bigvee x)_i - x_i = \text{maks}(x_i, x_{i+1}) - x_i \geqslant 0$ is $E_+ = \Sigma((\bigvee x)_i - x_i) = \|\bigvee x - x\|$. Soortgelyk is $E_- = \Sigma(x_i - (\bigwedge x)_i) = -\|\bigwedge x - x\|$. Maar $T(x) = E_+ - E_-$, wat die gelykheid gee.

Die laaste gedeelte is op 'n omslagtige manier bewys, maar kan eenvoudiger, en insiggewend, van bogenoemde resultaat volg.

$$\begin{aligned}
T(\bigvee x) &= 2\|\bigwedge\bigvee x - \bigvee x\| = 2\Sigma(\bigvee x - \bigwedge\bigvee x)_i, \text{ omdat } \bigvee \geqslant \bigwedge\bigvee \\
&= 2\Sigma(\bigvee x - x)_i + 2\Sigma(x - \bigwedge\bigvee x)_i \\
&= 2\|\bigvee x - x\| - 2\|\bigwedge\bigvee x - x\|, \text{omdat } \bigvee \geqslant \bigwedge\bigvee \geqslant I \\
&= T(x) - T(x - \bigwedge\bigvee x), \text{ omdat } (\bigwedge\bigvee x)_i - x_i \text{ uit pulse geskei deur nulle bestaan} \\
&= T(\bigwedge\bigvee x), \text{ omdat } \bigwedge\bigvee \text{ variasiebehoudend is}
\end{aligned}$$

Die 1-norm het 'n eie heuristiese motivering vir sy relevantheid in die teorie van nielineêre gladstrykers. Dit is die norm wat robuust is, wat met die volgende eenvoudige argument gemotiveer kan word. Laat $x_0, x_1, \ldots, x_{2n}$ 'n ry metings van die lengte van 'n tafel wees, wat algemeen foute op het. Deur die aanname dat die tafel se lengte konstant moet wees, wat in sy laaste konsekwensies natuurlik nie waar is nie, kan gesoek word na

ISSN 1995-5928 | Tel: 021 886 5169 | E-pos: akademies@litnet.co.za

hierdie konstante waarde c. Deur aan te neem dat die metings $x_i = c + e_i$ is, met foute e_i gekontamineer word, skei ons die vektor x in $c_i = c$ en e_i deur c so te kies dat die vektor $e = [e_0, e_1, \ldots, e_{2n}]$ die naaste aan x is in 'n gekose norm. Die 2-norm is populêr om verskeie redes, maar hoofsaaklik omdat dit deur 'n binneproduk geïnduseer word en dus 'n maklike bekende oplossing gee: c is die gemiddeld van die waardes x_i. Dit is baie goed as benadering mits die metingsfoute e_i "goedgeaard" is. Dit sal byvoorbeeld geld as e_i uit afkappingsfoute kom in die meetproses.

As een van die metings egter deur 'n fout in die teken van die eksponent so erg versteur word dat dit met 'n faktor van 10^{14} vergroot word, sal die gemiddeld ook met 'n soortgelyke faktor vergroot, en dus 'n sinlose waarde gee. Dit is die probleem van impulsiewe geraas. As die 1-norm egter gekies word, sal die vektor e geminimeer word presies wanneer $c =$ mediaan$\{x_0, x_1, \ldots, x_{2n}\}$ gekies word. Enkele groot of klein waardes, byvoorbeeld maks$\{x_i\}$ en min$\{x_i\}$, het geen invloed op die waarde van c nie. Daarom is hierdie die mees robuuste norm. Ter vergelyking is dit insiggewend dat die keuse van $c = \frac{1}{2}(\min\{x_i\} + \text{ maks}\{x_i\})$ die beste keuse is in die ∞-norm, of die sup-norm. Hierdie is die toepaslike keuse as die foute e_i deur harmoniese vibrasies veroorsaak word, soos byvoorbeeld in die geval van 'n vibrerende veer of snaar. Dit is algemene ervaring dat 'n vibrerende snaar oënskynlik in twee posisies sigbaar is. Die sup-norm is egter die mins robuuste van die p-norm, soos intuïtief duidelik is.

2. Die monotoonheidsklasse, en Diskrete-Puls-Transforms

Definisie 4:

(a) Die ry x is n-monotoon as $\{x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n}, x_{i+n+1}\}$ monotoon is vir alle i, d.w.s. $x_i \leqslant x_{i+1} \leqslant \cdots \leqslant x_{i+n+1}$ of $x_i \geqslant x_{i+1} \geqslant \cdots \geqslant x_{i+n+1}$.

(b) $\mathcal{M}_n^+ = \text{Beeld}(\bigwedge^n \bigvee^n)$, $\mathcal{M}_n^- = \text{Beeld}(\bigvee^n \bigwedge^n)$ en $\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_n^- \cap \mathcal{M}_n^+$.

Let op die gebruik van die woord Beeld as die benaming vir die versameling van beelde van die operator, omdat die versamelings nie algemeen vektorruimtes is nie. By 'n lineêre operator is $\text{Beeld}(A) = \text{ Beeldruimte}(A)$.

Soos gebruiklik vir operatore is $P^0 = I$, sodat $\mathcal{M}_0^+ = \mathcal{M}_0^- = \mathcal{M}_0 = l_1$. Dit is duidelik dat idempotente operatore gelyk is aan die identiteitsoperator I op die beeldruimte.

Stelling 4: Met $U = U_n = \bigwedge^n \bigvee^n$ en $L = L_n = \bigvee^n \bigwedge^n$ is

(a) $\mathcal{M}_n = \text{Beeld}(U_n L_n) = \text{ Beeld}(L_n U_n)$.

(b) $\mathcal{M}_n = \{x;\ x \text{ is } n - \text{monotoon}\}$

Bewys: Die stellings is bewys [5], maar 'n bewys van (a) is insiggewend en eenvoudig om te herhaal. Ons let op dat $L(UL) \leqslant UL$, omdat $L \leqslant I$. Verder het ons dat $(LU)L \geqslant (UL)L = U(LL) = UL$, omdat $LU \geqslant UL$ en $LL = L$. Dus is $LUL = UL$, en $\text{Beeld}(UL) \subset \text{ Beeld}(U)$. Dus is $\text{Beeld}(UL) \subset \mathcal{M}_n^- \cap \mathcal{M}_n^+ = \mathcal{M}_n$.

Omgekeerd volg dit maklik dat $x \in \mathcal{M}_n$ impliseer dat daar twee rye y en z bestaan sodat $x = Ly = Uz$. Maar dan is $Lx = L(Ly) = Ly = x$ en $U(Lx) = Ux = U(Uz) = Uz = x$. Dit beteken dat x in $\text{Beeld}(UL)$ is. 'n Soortgelyke argument as bostaande geld vir die gelykheid $\mathcal{M}_n = \text{ Beeld}(LU)$, sodat (a) bewys is.

■

ISSN 1995-5928 | Tel: 021 886 5169 | E-pos: akademies@litnet.co.za

Dit is duidelik dat ons 'n geneste ry versamelings het sodat $\mathcal{M}_0 \supset \mathcal{M}_1 \supset \mathcal{M}_0 \supset \cdots \supset \mathcal{M}_n \supset \cdots$, waarvan die deursnit slegs monotone rye bevat, omdat monotone rye absoluut sommeerbaar kan wees slegs as hulle identies die nulry is. Hierdie versamelings gee ook direk die "wortels" *(roots)* van die mediaan-operatore wat in $\mathcal{M}_n$ lê. (Die ander is almal periodies en lê dus nie in $\mathcal{M}_n$ nie.) Daar is dus genoegsame rede om belang te stel in die benaderingseienskappe van die versamelings $\mathcal{M}_n$. Dit is duidelik dat hulle baie groot is wanneer n klein is.

In die vroeë negentigs van die vorige eeu het Restrepo en Bovic presies dit gedoen, en aangetoon dat beste benaderings tot in arbitrêre rye bestaan m.b.t. die p-norm, onder andere [1]. Die algoritmes wat aangegee is vir die konstruksie van diesulkes het egter die ernstige nadeel gehad dat hulle nielokaal is. Dit is nie goed vir implementering in reële tyd nie, en daar is oral ook sleggeaardheid, in die sin dat 'n verandering by 'n punt veranderings arbitrêr weg kan veroorsaak.

Dit sal uit ons verdere analise heuristies duidelik word hoekom dit so is, en so sal bly. Die verhouding tussen die mediane en die LULU-operatore lei tot afskattings, wat toon dat gladstryking met albei tipes naasbeste benaderings gee. Ongelykhede van die Lebesgue-tipe bestaan as bewyse hiervan. Dit is belangrik en nuttig en kan opgesom word uit basiese resultate wat bewys is [5].

Stelling 5: Laat x, y rye wees in $\mathcal{M}_0$, en $c = \sqrt[p]{2n+1}$, met $p \geqslant 1$. As $U = \bigwedge^n \bigvee^n$ en $L = \bigvee^n \bigwedge^n$, geld:

(a) $\|Ux - Uy\|_p \leqslant c\|x - y\|_p$ en $\|Lx - Ly\|_p \leqslant c\|x - y\|_p$, met c minimaal.

(b) As $y \in \mathcal{M}_n$ is, $\|LUx - LUy\|_p \leqslant c\|x - y\|_p$ en $\|ULx - ULy\|_p \leqslant c\|x - y\|_p$, met c minimaal.

(c) As $y \in \mathcal{M}_n$ en $UL \leqslant P \leqslant LU$, geld vir enige $s \in \mathcal{M}_n$ dat $\|Px - s\|_p \leqslant (1+c)\|x - s\|_p$.

Dit is insiggewend om die resultate van hierdie stelling te interpreteer. Daar is drie belangrike intervalle ter sprake vir afbeeldings van 'n ry x deur LULU-operatore. Daar is die boonste omhulsel van Ux en die onderste omhulsel Lx, met $L_n x \leqslant U_n L_n x \leqslant M_n x \leqslant L_n U_n x \leqslant U_n x$. Rofweg gesê "skep" die gladstryker U_n net afwaartse pulse van wydte nie meer as n af, en L_n net opwaartse pulse. Die interval $[Lx, Ux]$ is dus nie robuust nie, en vorm net 'n omhulsel vir beelde. Belangriker is die interval $[ULx, LUx]$, wat as die primere LULU- interval beskou kan word, want beide opwaartse en afwaartse pulse kan verwyder word deur beide. Duidelik is dus dat $Lx \leqslant x \leqslant Ux$ maar dat x nie noodwendig in $[ULx, LUx]$ is nie. Beide $U_n L_n x$ en $L_n U_n x$ is in $\mathcal{M}_n$, terwyl $L_n x$ en $U_n x$ slegs gewaarborg is om in $\mathcal{M}_n^- \cup \mathcal{M}_n^+$ te wees. Daar is populêre gladstrykers wat beelde gee wat in die interval $[U_n L_n x, L_n U_n x]$ lê. Die Mediaan M_n, alle magte M_n^k, $R = \lim_{k\to\infty} M_n^k$ en M_n^*, die rekursiewe weergawe van M_n, hoewel slegs R en M_n^* gewaarborg is om n-monotoon te wees [5], wat verband hou met die probleme wat ervaar is met 'n teorie vir die Mediane.

Weens die onsimmetriese robuustheideseienskappe van $L_n U_n$ en $U_n L_n$, veral as $n > 1$, sal verdere intervalle belangrik word. Spesifiek is intervalle van die vorm $[F_n x, C_n x]$ belangrik, waar F_n en C_n rekursief gedefinieer word deur $F_n = U_n L_n F_{n-1}$ en $C_n = L_n U_n C_{n-1}$ met $C_0 = F_0 = I$. Hierdie intervalle is binne $[U_n L_n x, L_n U_n x]$, en $\text{Beeld}(F_n) = \text{Beeld}(C_n) = \mathcal{M}_n$ soos eenvoudig bewys kan word uit Stelling 1.

Die gladstrykers F_n en G_n is komposisies van gladstrykers en verwyder dus in die algemeen meer variasie wanneer hulle in $\mathcal{M}_n$ afbeeld. In die algemeen sal hulle dus slegter benaderings gee as die gladstrykers $L_n U_n$ en $U_n L_n$, maar die afskattings van bostaande stelling geld steeds.

ISSN 1995-5928 | Tel: 021 886 5169 | E-pos: akademies@litnet.co.za

Variante van F_n en G_n wat Komposisies is van L_nU_n en U_nL_n, maar wel in ander volgorde van keuses, soos byvoorbeeld $U_3L_3L_2U_2U_1L_1$ is ook moontlike keuses. Om met hierdie keuses te help is dit wenslik om, moontlik skerp, afskattings te kry tussen die benaderings tot x wat in $\mathcal{M}_n$ verkry word wanneer x in $\mathcal{M}_{m-1}$ is. Hierdie afskattings mag ook nuttig wees ir die insig wat benodig word om afbeeldings in $\mathcal{M}_n$ te vind wat optimaal is in 'n spesifieke sin.

'n Sterk, vermoede dat beste benaderings uit $\mathcal{M}_n$ binne die LULU-interval $[U_nL_nx, L_nU_nx]$ lê, het lank bestaan, maar het alle bewyspogings ontwyk. Dit was totdat 'n eenvoudige teenvoorbeeld die vermoede, ten minste vir $n > 1$, verkeerd bewys het.

Voorbeeld 1: Laat $x = \delta_{i1} + \delta_{i2}$ wees en $w = \delta_{i0} + x$. Dan is $w \in \mathcal{M}_2$ met $\|w - x\|_1 = 1$, terwyl $L_2U_2x = U_2L_2x = 0$ met $\|L_2U_2x - x\| = \|U_2L_2x - x\| = 2$. Klaarblyklik is $w \notin [U_2L_2x, L_2U_2x]$, en is w 'n beter benadering as enige ry in die interval, en heel waarskynlik 'n beste benadering tot x uit $\mathcal{M}_2$. Verder is w nie eens in $[L_2x, U_2x]$ nie, en nie uniek nie.

Hierdie voorbeeld illustreer die subtiliteite van die benaderingsprobleme ter sprake, sowel as die waarde van Stelling 5. Verder sal die faktor 2, wat voorkom in die relatiewe benaderingsfoute, gereeld in verdere ondersoeke verskyn. Dit is ook kleiner as die grens deur Stelling 5 verskaf. Omdat die benaderingsprobleem vir gladstrykers 'n sekondêre probleem is, aangesien gladstryking, of skeiding, die primêre doel is, sal 'n relatief klein faktor nie te versmaai wees nie. Die interval $[U_nL_nx, L_nU_nx]$ lyk steeds na 'n kritieke gebied om op te konsentreer. Dit is dan ook 'n bydraende rede hoekom verdere navorsing in hierdie verband aandag behoort te geniet, ten spyte van die moeisame en vreemde probleme. Elke inkrementele stap in die uitbou van insig lyk waardevol.

3. Fundamentele voorlopige resultate

Dit wil voorkom of vordering in begrip van naasbeste benadering sal afhang van die volgende fundamentele hulpstellng (lemma) en sy duaal. Die duaal van so 'n stelling is direk afleibaar uit die identiteit $L_nN = NU_n$, waar N die negasie-operator is, sodat $N(x) \equiv -x$.

Lemma: Laat $L_nx_i = \max\{\min\{x_{i-n}, \cdots, x_i\}, \cdots, \min\{x_i, \cdots, x_{i+n}\}\}$. Dan volg:

(a) As $x_i = L_nx_i$, dan is daar 'n $j \in [i-n, i]$ sodat $\min\{x_j, \ldots, \ldots, x_{j+n}\} = x_i$ en dus dat $x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{j+n} \geqslant x_i$

(b) As $x_i > L_nx_i$, is daar twee indekse ℓ en r met $\ell < i < r$ en $r - \ell \leqslant n + 1$ sodat $x_\ell, x_r < x_i$, $L_nx_\ell = x_\ell$ en $L_nx_r = x_r$.

Bewys:

(a) Omdat elke versameling $\{x_j, \ldots, x_{j+n}\}$, met $j \in [i-n, i]$, vir x_i bevat, is

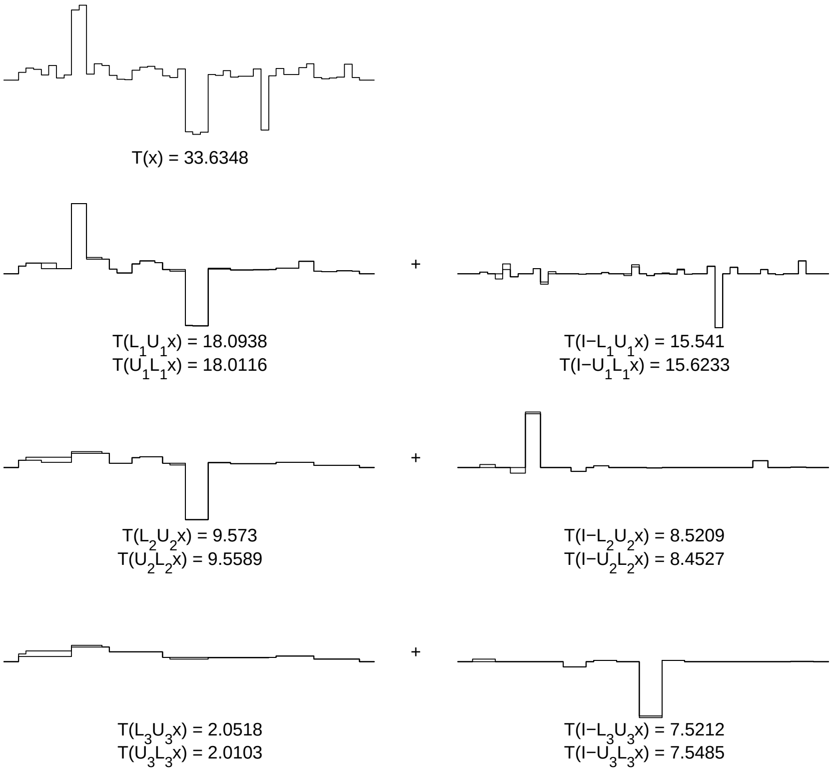
$$\min\{x_j, \ldots, x_{j+n}\} \leqslant x_i,$$

sodat die maksimum van die minima nie groter as x_i is nie. As $x_i = L_nx_i$ moet een van die versamelings alle elemente nie kleiner nie as x_i hê.

(b) Neem nou aan dat $x_i > L_nx_i$.

Elkeen van $\min\{x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n}\} < x_i$ en $\min\{x_{i-n}, \ldots, x_i\} < x_i$.

ISSN 1995-5928 | Tel: 021 886 5169 | E-pos: akademies@litnet.co.za



Figuur 1: Twee dekomposisies van 'n ry x met LU en UL. Let op dat rye deur histogramme voorgestel word.

> Neem die kleinste indeks van die waardes $\{x_i, \dots, x_{i+n}\}$ wat kleiner as x_i is, en ℓ die grootste indeks van $\{x_{i-n}, \dots, x_i\}$ wat kleiner as x_i is.
>
> Dan is $r - \ell \leqslant n + 1$ anders bevat $\min\{x_\ell, x_{\ell+1}, \dots, x_n\}$ geen element wat kleiner as $x_i$is nie.
>
> Die maksimum wat $L_n x_i$ definieer is dus groter as x_i, wat teenstrydig is met die aanname.

Gevolgtrekking: As $x \in \mathcal{M}^-_{n-1}$ is $x = L_{n-1}x$ en bevat geen opwaartse pulse korter as n nie. Dan is $x - L_n x$ orals nul behalwe by disjunkte intervalle van wydte n, waar dit konstant is.

Wanneer 'n ry x gladgestryk word, boet ons onafwendbaar algemeen benadering tot x in. Ons "skuur 'n plank" om hom gladder te kry, en onafwendbaar verloor ons van die oorspronklike hout. Ons kan ook "afgeskuurde poeier" gebruik om "gate op te vul" en sodoende weer verder wegbeweeg van die oorspronklike hout. Dit lei onafwendbaar tot 'n mate van keuse of ons "gate vul" of "knoppe afskil". Verder kan ons eers gate vul met U en daarna knoppe afskil met L wat tot 'n operator LU lei, of andersom. Vir 'n tipiese ry x met goedgeaarde geraas op sal LUx en ULx nie baie verskil nie. Dit is nie voorspelbaar watter een nader is aan die oorspronklike ry nie. In die totale-variasie-norm is dit duidelik dat, weens die feit dat beide operatore variasiebehoudend is, dit so is dat die twee komposisies se beelde afwisselend nader of verder in totale variasie van die oorspronklike kan verskil. Dit word duidelik in Figuur 1 waar 'n ry bestaande uit drie beduidende pulse met goedgeaarde geraas gekontamineer is. Rekursiewe dekomposisie gee 3 opeenvolgens gladder benaderings vir beide keuses LU en UL. Die benaderingsfoute is baie eenders en

ISSN 1995-5928 | Tel: 021 886 5169 | E-pos: akademies@litnet.co.za

gee afwisselend effens beter benaderingsfoute.

Om met keuses te help is die volgende stelling nuttig:

Stelling 6: Vir $x \in \mathcal{M}_{n-1}$ geld $\|U_n L_n x - x\|_1 \leqslant 2\|L_n U_n x - x\|_1$ en

$$\|L_n U_n x - x\|_1 \leqslant 2\|U_n L_n x - x\|_1.$$

Bewys: Laat $L = L_n, U = U_n$ en $W = LU$ en $w = Wx$ vir tydelike eenvoud van notasie. Beskou eers $A = \{i : x_i > ULx_i\}$ en $B = \{i : x_i > Lx_i\}$. Omdat $UL \geqslant L$ is $A \subset B$. Volgens die lemma bestaan B uit disjunkte intervalle van die vorm $B_i = \{i, i+1, \ldots, i+n-1\} = [i, i+n-1]$. Met herindeksering kan die notasie weer tydelik vereenvoudig word deur $i = 0$ te kies.

Van die lemma volg verder dat $j \in [-n+1, -1] \cup [n, 2n-1]$ impliseer dat

$$\begin{gathered} Lx_{-1} = x_{-1} < x_0 = x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} > x_n = Lx_n \\ \text{en} \quad x_j = Lx_j \quad \text{vir} \quad j \in [0, n-1] \\ \text{dus is is } Lx_j = Lx_0 \quad \text{vir} \quad j \in [0, n-1]. \end{gathered}$$

Die operatore $U, L, W = LU, UL$ is almal ftp, sodat hulle beelde die gelykhede op $[0, n-1]$ erf.

Omdat $x \in \mathcal{M}_{n-1}$ (x is $(n-1)$-monotoon) en $x_{-1} < x_0$, $x_{n-1} > x_n$ en $x \in \mathcal{M}_{n-1}$, volg dat

$$x_{-n+1} \leqslant \cdots \leqslant x_{-1} < x_0 = x_1 = \cdots = x_{n-1} > x_n \geqslant x_{n+1} \geqslant \cdots \geqslant x_{2n-1}.$$

U, L, W, UL is almal differensie-nietoenemend. Spesifiek is dus ook

$$Ux_{-1} \leqslant Ux_0 = Ux_1 = \cdots = Ux_{n-1} \geqslant Ux_n.$$

Van kritieke belang vir die bewys van die stelling is dat $Ux_{-1}, Ux_n < Ux_0$ nie kan waar wees nie. Weens die lemma se duaal sal $Ux_{-1} < Ux_0$ dan impliseer dat $Ux_{-1} < Ux_0 \leqslant \cdots \leqslant Ux_{n-1} \leqslant Ux_n$, en $Ux_n < Ux_{n-1}$ sal weer soortgelyk impliseer dat $Ux_{-1} \geqslant Ux_0$. Dit is teenstrydig.

Beskou eers die geval waar $Ux_{-1} \leqslant Ux_0$, en dus ook $Ux_n = Ux_0$.

(a) Dan is $Wx_j = L(Ux)_j$ konstant op $[0, n]$. As $\ell \in [n, 2n-2]$ is $x_\ell \geqslant x_{\ell+1}$ en $LUx_\ell = x_\ell$. Omdat $I - LU = I - W$ ftp is, volg dat $(x-w)_\ell \geqslant (x-w)_{\ell+1}$ of $(w-x)_\ell < (w-x)_{\ell+1}$. Dus is $w_n - x_n \leqslant w_\ell - x_\ell \leqslant \cdots \leqslant w_{2n-1} - x_{2n-1}$. Hieruit volg die volgende ongelykhede.

As $j \in [0, n-1]$ geld:

$$\begin{aligned} 0 < x_j - ULx_j &= x_j - w_j + w_j - ULx_j \\ &= x_j - w_j + w_{n-1} - ULx_{n-1} \\ &\leqslant x_j - w_j + w_n - ULx_n \\ &\leqslant x_j - w_j + w_{n+j} - x_{n+j}, \end{aligned}$$

ISSN 1995-5928 | Tel: 021 886 5169 | E-pos: akademies@litnet.co.za

Dus is

$$|x_j - ULx_j| \leqslant |x_j - w_j| + |w_{n+j} - x_{n+j}|,$$

Sommering oor die indekse $j = 0, \ldots, n-1$, gee

$$\sum_{j=0}^{n-1} |x_j - ULx_j| \leqslant \sum_{j=0}^{n-1} |w_j - x_j| + \sum_{j=n}^{2n-1} |w_j - x_j| = \sum_{j=0}^{2n-1} |w_j - x_j|.$$

(b) Die tweede geval kan bewys word deur ’n soortegelyke argument te voer in die interval $[-n+1, -1]$.

Nou is $Ux_{n-1} > Ux_n$, en is die som van bo begrens deur

$$\sum_{j=0}^{n-1} |w_j - x_j| + \sum_{j=-n+1}^{-1} |w_j - x_j| = \sum_{j=-n+1}^{n-1} |w_j - x_j|.$$

Ons weet nie watter van die twee gevalle geld nie, maar die eerste deel van elkeen is dieselfde, en definitief is dit dus in beide gevalle waar dat

$$\sum_{j=0}^{n-1} |x_j - ULx_j| \leqslant \sum_{j=0}^{n-1} |w_j - x_j| + \sum_{j=-n+1}^{-1} |w_j - x_j| + \sum_{j=n}^{2n-1} |w_j - x_j|$$

Die laaste twee somme is oor intervalle waar $LUx_j = ULx_j = x_j$.

Op hierdie stadium is die bewys eers halfpad klaar. Daar is nou afskattings vir die som oor B, omdat elkeen van die intervalle B_i waaruit B bestaan, soortgelyke resultate gee.

’n Soortgelyke bewys soos tot hier gevoer, moet nou volg vir die geval waar $x_i < ULx_i$. (Die derde geval waar $x_i - ULx_i = 0$ lewer klaarblyklik geen bydrae tot $\|ULx - x\|_1$ nie.)

Laat dus $D = \{i : \; x_i < ULx_i\}$. Omdat $W = LU \geqslant UL$, volg direk dat as $j \in D$, dan is

$$j \in \{i : \; x_i < LUx_i = Wx_i\}$$

sodat $0 \leqslant ULx_j - x_j \leqslant w_j - x_j$.

Dus is $\sum_{j \in D} |ULx_j - x_j| \leqslant \sum_{j \in D} |w_j - x_j|$. Saamgevat, omdat $D \cap A = \phi$, gee die resultate tot dusver dat

$$\begin{aligned} \sum_{j \in D \cup B} |ULx_j - x_j| &\leqslant \sum_{j \in D \cup B} |x_i - w_i| + 2 \sum_{j \in \overline{B \cup S}} |x_j - w_j| \\ &\leqslant \|x - w\|_1 + \sum_{j \in \overline{D \cup B}} |x_j - w_j| \leqslant 2\|x - w\|_1 \end{aligned}$$

Dit bewys uiteindelik die stelling se eerste gedeelte. Die tweede volg uit dualiteit met $NLU = LUN$, aangesien geen nugter mens die bostaande moeite wil herhaal nie. ■

Aangesien beide L_nU_n en U_nL_n naasbeste benaderings tot ’n beste benadering gee, mag dit moontlik wees om ’n beter kandidaat as beide te konstrueer. Klaarblyklik mag die soektog in die interval $[U_nL_nx, L_nU_nx]$ belowend wees. ’n Eerste resultaat volg.

ISSN 1995-5928 | Tel: 021 886 5169 | E-pos: akademies@litnet.co.za

Stelling 7: Laat $x \in \mathcal{M}_{n-1}$. Daar bestaan 'n ry $w \in \mathcal{M}_n$ sodat

$$\|w - x\|_1 \leqslant \|x - L_n U_n x\|_1, \; \|x - U_n L_n x\|_1$$

Bewys: Die bewys volg deur konstruksie van so 'n ry. Laat $A = \{i : L_1U_1x_i - U_1L_1x_i > 0\}$, dus die versameling indekse wees, waar $LUx \neq ULx$. A bestaan uit disjunkte intervalle B_i van die vorm $[i, i+n] = \{i, i+1, \ldots, i+n\}$ sodat $LUx_{i-1} = ULx_{i-1}$ en $LUx_{i+m+1} = ULx_{i+m+1}$. Op elkeen van hierdie intervalle is $\sigma_u = \sum_{j=i}^{i+m} |x_i - LUx_i|$ en $\sigma_\ell = \sum_{j=i}^{i+m} |x_i - ULx_i|$ berekenbaar.

Laat $\gamma_i = (\sigma_u < \sigma_\ell)$, dus die veranderlike wees, sodat $\gamma_i = 1$ as $\sigma_u < \sigma_\ell$, en $\gamma_i = 0$ andersins.

Kies dan

$$W_n x_j = W x_j = \begin{cases} LUx_j, & \text{as} \quad j \notin A \\ \gamma_i LUx_j + (1-\gamma_i)ULx_j, & \text{vir } j \in B_i \subset A. \end{cases}$$

Dit is duidelik dat $LUx_j = ULx_j = Wx_j$, vir $j \notin A$, en algemeen is $ULx \leqslant w \leqslant LUx$, en dit bly nog nodig om te bewys dat $w \in \mathcal{M}_n$, of dat w n-monotoon is .

Beskou $j \in A$. Dan is j in een van die disjunkte intervalle B_i, en verder is

$$\sum_{j=1}^{t+m} |x_i - w_i| = \min \left\{ \sum_{j=1}^{i+m} |x_j - ULx_j|, \sum_{j=1}^{i+m} |x_j - LUx_j| \right\}.$$

Sommering or alle intervalle van hierdie tipe, asook alle ander indekse, waar die terme

$|x_j - w_j| = |x_j - LUx_j| = |x_j - ULx_j|$ dieselfde is, gee

$$\|x - w\|_1 = \sum_j |x_j - w_j| \leqslant \sum_j |x_j - ULx_j|, \; \sum_j |x_j - LUx_j|.$$

Ons weet dat as $LUx > ULx$ vir $j \in B_i = \{i, i+1, \ldots, i+m\}$, en $x \in \mathcal{M}_{n-1}$, dan bestaan die rye $(I - LU)x$ en $(I - UL)x$ elkeen uit nie-oorvleuelende blokpulse van wydte n. Die een ry blokpulse oorvleuel volledig met die ander se blokpulse of glad nie [5]. 'n Blokpuls ontstaan as 'n konstante seksie in 'n ry groter is as albei die buurwaardes of kleiner is as albei die buurwaardes. Duidelik volg dat $m \geqslant n$.

Om te bewys dat $w \in \mathcal{M}_n$ is dit voldoende om te toon dat daar geen versameling $T = \{k, k+1, \ldots, k+n+1\}$ bestaan wat nie monotoon is nie. Dit kan net wees as daar oorvleueling van T met twee van die indeksversamelings $B_i = [i, i+n]$ en $B_j = [i, j+r]$ van A is, waar $w = LUx$ in een en $w = ULx$ in die ander is en $i+m, j \in T$. Duidelik, weer eens, is dat $r \geqslant n$. Aangesien $LUx_{j-1} = ULx_{j-1}$ en $LUx_{i+m+1} = ULx_{i+m+1}$, volgens aanname vir B_i en B_j, het ons dat

$$i < k < i+m+1 < j < k+n+1 < j+r.$$

Van dualiteit kan ons aanneem dat $w = LUx$ op $[j, j+m+1]$. Op $[i+m+1, j-1]$ is $w = LUx = ULx$. Indien $w = LUx$ op B_i is w klaarblyklik monotoon op T omdat daar

ISSN 1995-5928 | Tel: 021 886 5169 | E-pos: akademies@litnet.co.za

$w = LUx$, wat n-monotoon is. Die geval waar $w = ULx$ op B_i bly oor. As nou eerstens aangeneem word dat $(I - UL)x$ 'n negatiewe blokpuls het, wat eindig by $i + m$, het ons dat

$$x_{i+m-n-1} > x_{i+m-n} = \cdots = x_{i+m} < x_{i+m+1}.$$

Omdat UL ftp is, volg dat

$$ULx_{i+m-n-1} \geqslant LULx_{i+m-n} = \cdots = ULx_{i+m} \leqslant ULx_{i+m+1}.$$

Omdat $x \in \mathcal{M}_{n-1}$ volg verder dat

$$x_{i+m} < x_{i+m+1} \leqslant \cdots \leqslant x_j \leqslant \cdots \leqslant x_{i+m+n}.$$

Klaarblyklik moet die blokpuls wat by j begin 'n positiewe waarde hê sodat $x_j < x_{j+1}$. Hieruit volg dat $x_j < x_{j+1} \leqslant \cdots \leqslant x_{j+n}$, omdat $x \in \mathcal{M}_{n-1}$ en $w = LUx$ hierdie ordes erf omdat LU ftp is. Omdat $k + n + 1 \in [j, j + n]$ is dit duidelik dat

$$w_k \leqslant w_{k+1} \leqslant \cdots \leqslant w_{k+n+1},$$

wat teenstrydig sou wees met 'n aanname dat w op T niemonotoon is.

'n Soortgelyke argument sou volg as ons aanneem dat $(I - LU)x$ 'n positiewe blokpuls was.

Dus is $w \in \mathcal{M}_n$. ■

Die mediaan-operatore M_n het populêr geword vir die verwydering van (spesifiek impulsiewe) geraas van rye, waarna lineêre prosessering veiliger is. Hulle voortoepassing maak die gewone lineêre seinprosesseringsalgoritmes meer robuust. Sonder om hier tegnies te raak, is die mediane simmetries in hul gedrag: $M_n(x) = -M_n(-x)$. Hulle is dus ewe robuust opwaarts en afwaarts.

Die LULU-operatore, daarenteen, is nie simmetries in hierdie sin nie $L(-x) = -U(x)$ ens. Hulle is egter voorspelbare boustene van 'n teorie vir nielineêre gladstrykers, het 'n vinnige, paralleliseerbare implementering, en lei tot 'n hanteerbare gelyktydige teorie vir benaderingseienskappe. Hierdie teorie is selfs toepaslik op afskatting van benaderingseienskappe van die mediane, en komposisies, weens die ongelykhede $L_n \leqslant U_nL_n \leqslant M_n \leqslant L_nU_n \leqslant U_n$, wat geldig is. 'n Voorbeeld hiervan is die volgende stelling, wat op verskeie maniere veralgemeen sou kon word, maar dit is nie die doel hier nie.

Stelling 8: Laat $p \geqslant 1$. Vir elke $x \in M_0$ geld die volgende:

(a) $\|(L_1U - M_1)x\|_p^p + \|(M_1 - U_1L_1)x\|_p^p = \|(L_1U_1 - U_1L_1)x\|_p^p$

(b) $\|(L_nU_n - M_n)x\|_1 + \|(M_n - U_nL_n)x\|_1 = \|(L_nU_n - U_nL_n)x\|_1$

Bewys: Omdat $L_nU_n \geqslant M_n \geqslant U_nL_n$ geld die volgende:

$$(L_nU_n - M_n)x_i + (M_n - U_nL_n)x_i = (L_nU_n - U_nL_n)x_i.$$

Sommering bewys deel (b).

ISSN 1995-5928 | Tel: 021 886 5169 | E-pos: akademies@litnet.co.za

In die geval van $p = 1$ is dit bewys [6] dat

$$(L_1U_1 - M_1)x > 0 \Rightarrow (M_1 - U_1L_1)x_i = 0 \quad \text{en}$$
$$(M_1 - U_1L_1)x > 0 \Rightarrow (L_1U_1 - M_1)x = 0, \quad \text{sodat deel (a) bewys is.}$$

■

Dit is insiggewend om weer voorbeeld 1 te beskou, maar in sy duale vorm.

Voorbeeld 1: Laat $x = -\delta_{i1} - \delta_{i2}$ 'n blokpuls wees en $w = -(\delta_{i0} + \delta_{i1} + \delta_{i2})$,

$U_3x = 0$ en $U_2x = x$. Daar is geen beter benadering uit die beeldversameling van U_2 nie, maar wel uit die beeldversameling van U_3, naamlik $U_3w = w$ en $||w - x||_1 = 1$, terwyl $||U_3x - x||_1 = 2$.

Voorbeeld 2: Laat $x = -\delta_{i0} - \delta_{i2}$ 'n nulry wees met twee afwaartse enkelpulse by 0 en 2.

$U_1x = 0$ en $||U_1x - x||_1 = 2$, terwyl U_1L_1x in die beeldversameling van U_1 lê, en

$$||U_1L_1x - w||_1 = 1.$$

In voorbeeld 1 is die beter benadering nie in die interval $[L_2x, U_2x]$ nie, en in die tweede geval is w wel in $[L_1x, U_1x]$ en in $[U_1L_1x, L_1U_1x]$.

Hierdie resultate illustreer weer eens die onafwendbare gevolg van 'n eenvoudige teenstrydigheid tussen twee behoeftes: die doel van 'n gladstryker en die doel van benadering, of die doel van "pulse" van voorgeskrewe kortstondigheid, of om wydte te verwyder, en die doel om nie te ver van 'n onderliggende "sein" of struktuur af te wyk nie.

Wanneer na die benaderingseienskappe van gladstrykingsoperatore gekyk word, behoort die benadering prioriteit te kry. Wanneer na die gladstryking van benaderingsoperatore gekyk word, behoort gladstryking prioriteit te hê. 'n Kompromis is dus onafwendbaar.

4. Resultate vir die T-norm

Vir ekwivalente resultate in die T-norm is dit moontlik om soortgelyke resultate af te lei as hier bo, met vermoedelik effens meer kompleksiteit in bewyse. Daar kan egter 'n kortpad gevind word deur 'n fundamentele verband tussen die T-norm en die $p = 1$-norm te gebruik.

$$T(x) = \Sigma|x_{i+1} - x_i| \leqslant 2||x||_1.$$

Belangrik hier is dat in $x \in \mathcal{M}_{n-1}$, LUx en ULx rye met nie-oorvleulende blokpulse is [5], sodat dit dadelik volg dat

$$T(I - LU)x = \frac{2}{n}||(I - LU)x||_1 \qquad \text{en} \qquad T(I - UL)x = \frac{2}{n}||(I - UL)x||_1$$

Dadelik volg hieruit 'n resultaat analoog aan die van Stelling 6.

ISSN 1995-5928 | Tel: 021 886 5169 | E-pos: akademies@litnet.co.za

Stelling 9: Vir $x \in \mathcal{M}_{n-1}$ geld:

$$\begin{aligned} T(U_nL_nx - x) &\leqslant 2T(L_nU_nx - x) \quad \text{en} \\ T(L_nU_nx - x) &\leqslant 2T(U_nL_nx - x). \end{aligned}$$

Bewys: $T(L_nU_nx - x) = \frac{2}{n}\|L_nU_nx - x\|_1$ en Stelling 6. Die duaal volg soortgelyk. ■

Verder is daar die veralgemening van Stelling 7, wat maklik volg uit die definisie van die operator W, soos gegee in die bewys van Stelling 7.

Stelling 10: Vir $x \in \mathcal{M}_{n-1}$ geld

$$T(W_nx - x) \leqslant T(L_nU_nx - x), \quad T(U_nL_nx - x).$$

Bewys: Dit is bewys dat W_n ftp is, en dat $W_nx - x$ uit nie-oorvleuende blokpulse bestaan. Dus is $T(W_nx - x) = \frac{2}{n}|W_nx - x\|_1$. Van Stelling 7 volg die bewering. ■

Verder is dit insiggewend om na voorbeeld 1 te kyk. In die T-norm gee hierdie voorbeeld nie 'n beter benadering as beide L_2U_2 en U_2L_2 nie! Dit gee ruimte om die volgende hipotese te konstateer.

Hipotese: Laat $x \in \mathcal{M}_{n-1}$. Dan is W_nx 'n beste benadering tot x in die T-norm.

Tot dusver was pogings om die hipotese te bewys onvrugbaar te midde van oënskynlike kompleksiteit. Daar het egter altyd 'n vermoede gebly dat 'n eenvoudige bewys moet bestaan. Die beskouing van 'n separator as 'n veralgemening van 'n (lineêre) projeksie, wat altyd 'n optimale benadering gee in die 2-norm, laat die gedagte dat 'n separator wat ftp is, en dus variasiebehoudend is, 'n optimale benadering moet gee. Hierdie idee verdien verdere navorsing.

5. Gevolgtrekking

Bestaande resultate vir die naasbeste benadering van 'n ry x, soos saamgevat in Stelling 5, is verskerp vir die gevalle waar x "gladder" is deurdat $x \in \mathcal{M}_{n-1}$. Die duale separators L_nU_n en U_nL_n het benaderingsfoute binne 'n faktor 2 van mekaar, en deur hul beeldrye op 'n spesifieke manier te benut, word 'n ry w in $\mathcal{M}_n$ geskep wat x beter benader as beide L_nU_nx en U_nL_nx. 'n Hipotese word opgestel dat dit die beste benadering (uit $\mathcal{M}_n$) binne die interval $[U_nL_nx, L_nU_nx]$ is.

Soortgelyke resultate vir meer algemene x, met 'n faktor groter as 2, lyk haalbaar, maar vir die beperking tot $\mathcal{M}_{n-1}$ is die belangrike resulate hier afgelei.

Daarvoor kan die volgende redenasie aangevoer word. By die seleksie van 'n gladstryker vir 'n algemene ry word primêr gekies uit rekursiewe weergawes van die vorm C_n en F_n, waar $C_n = L_nU_nC_{n-1}$ en $F_n = U_nL_nF_{n-1}$. Die rede hiervoor is die groter robuustheid van hierdie komposisies teenoor uitskieters. Terselfdertyd is hierdie operatore beter vir die verwydering van additiewe geraas, bestaande uit 'n ry onafhanklike identies verspreide getalle uit 'n distribusie. Hierdie gladstrykingsoorwegings is primêr teenoor die sekondêre vraag van benaderingseienskappe.

By 'n DPT van 'n ry x word 'n gegewe ry x deur rekursiewe "afskil" van resolusievlakke, in 'n som van rye, wat uit pulse bestaan, ontbind. Die ry x word deur S_1 afgebeeld op die "gladder" ry $S_1x \in \mathcal{M}_1$ en die eerste resolusievlak $r_1(x) = S_1x - x$. Dan word

ISSN 1995-5928 | Tel: 021 886 5169 | E-pos: akademies@litnet.co.za

rekursief afgebeeld deur die ry $S_{n-1}S_{n-2}\cdots S_1x$ af te beeld op $S_nS_{n-1}\cdots S_1x$, met $r_n(x)$ die verskil. As S_i variasiebehoudend is, geld dat

$$T(x) = \sum_{i=1}^{n} T(r_i(x)) + T(S_n(x)).$$

Die basiese voorbeelde is C_n en F_n, wat dus gee dat

$$T(x) = T(C_n(x)) + \sum_{i=1}^{n} T(C_i(x) - C_{i-1}(x))$$

en

$$T(x) = T(F_n(x)) + \sum_{i=1}^{n} T(F_i(x) - F_{i-1}(x)).$$

Van Stelling 9 verskil die eerste resolusievlakke se Totale Variasie met hoogstens 'n faktor 2. Vir 'n lokale ry, dus een wat nul is buite 'n eindige interval, sal $T(C_nx)$ en $T(F_nx)$ uiteindelik gelyk wees vir groot n. Die afgeleide benaderingsresultate is dan juis belangrik wanneer n klein is. As byvoorbeeld dan die eerste n resolusievlakke weggelaat word vir ekonomie of eenvoud, het ons te doen met die benaderings C_nx en F_nx. As mens die beter benadering wil kies, sou mens op elke stadium van gladstryking W_n, soos in Stelling 6 gekonstrueer, verkies bo L_nU_n of U_nL_n.

As mens egter gesuperponeerde geraas wil elimineer, sal mens verkies om 'n gladstryker S_i so te kies dat die vroeë resolusievlakke, wat oor die algemeen meer pulse sal bevat, so groot as moontlike Totale Variasie het. Dit kan byvoorbeeld gedoen word deur C_n of F_n op elke stadium te kies, of deur analoog aan die definisie van W_n in Stelling 6, S_n so te kies dat

$$S_n(x) = (1 - \gamma_i)L_nU_n(x) + \gamma_iU_nL_n(x).$$

Dit gee 'n Totale Variasie in die resolusievlak wat bewysbaar nie minder is as wat beide L_nU_nx en U_nL_nx lewer nie. Dit sal ook algemeen effens minder oorblywende pulse gee as die eerste resolusievlakke weggelaat word, wat byvoorbeeld ekonomiese kodering bevorder.

Laastens, maar baie belangrik, is dat al die komposisies van LULU-operatore sowel as W_n en S_n ftp is, en dus vormbehoudend is in die volgende sin: die verskille tussen opeenvolgende waardes in die benaderings het nie opponerende tekens in die beeldry nie. Wanneer sulke benaderings slegs met ander vormbehoudende benaderings kompeteer, mag hul wel bewysbaar optimaal wees. Die bostaande hipotese, sowel as soortgelykes wat die 1-norm aanbetref, is dus moontlik makliker bewysbaar as dit beperk word tot vormbehoudende benaderings.

Dit word tans bestudeer.

Bibliografie

[1] Bovik, A.C., Restrepo, A. (1993) *Locally Monotonic Regression*, IEEE Transaction on Signal Processing. Sept. 1993, Vol. 41, No 9.

ISSN 1995-5928 | Tel: 021 886 5169 | E-pos: akademies@litnet.co.za

[2] Mallows, C.L. (1980). Some theory of non-linear smoothers, *Ann. Stat.* **8** (4), 695-715.

[3] Rohwer, C.H. (1989). Idempotent one-sided approximation of median smoothers. *J. Approx. Theor.* **58** (2), 151-163.

[4] Rohwer, C.H. (2004). Quasi-inverses and approximation with min-max operators. In: *Supplemento ai rendiconti del Circolo matematico di Palermo, Serie II*, Vol. **76**.

[5] Rohwer, C.H. (2005). *Non-linear Smoothing and Multiresolution Analysis. ISNM.* Vol. **150**. Birkhäuser.

[6] Rohwer, C.H. (2006). Quasi-inverses and the approximation with min-max operators in the ℓ_1-norm. *Quaest. Math.* **29**.

[7] Rohwer, C.H., Toerien, L.M. (1991). Locally monotone robust approximation of sequences, *J. Comput. Appl. Math.* **36**, 399-408.

[8] Rohwer, C.H., Laurie, D.P. The Discrete Pulse Transform. (2006) *SIAM J. Math. Anal*, Vol. 38 (3), 1012-1034.

Ontvang 16 Maart 2011; geplaas 26 Augustus 2011.

ISSN 1995-5928 | Tel: 021 886 5169 | E-pos: akademies@litnet.co.za